Васпитач у предшколским установама – друга година

Назив предмета: *Елементарни математички појмови*

Предметни професор: Проф. др Љиљана Пауновић

Консултације: четвртак 15:15 – 16:15

петак 9:15 – 10:15

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧКЕ ЛОГИКЕ

Логика је наука о закључивању и као таква користи се у најразличитијим наукама, а посебно у математици. Основа је целокупног математичког резоновања.

Искази

Дефиниција1. Исказ је реченица која има смисла и која је или тачна или нетачна.

Реченица која може да има тачну или нетачну вредност није исказ.

Пример1. “Данас је четвртак.” је тачан исказ

“2+5=7” је тачан исказ

“1+3=6” је нетачан исказ

“Реченица коју сада изговарам је лаж.” није исказ

Искази се најчешће обележавају малим словима латинице **p, q, r, s** … која се зову исказна слова.

Истинитосна вредност исказа може бити тачна или нетачна и означава се на следећи начин:

$\tau(p) = \top$, p је тачан исказ

$\tau(p) = \perp$, p је нетачан исказ.

Основне логичке операције

Слободно говорећи, логичка операција је поступак којим се исказу (исказима) придружује исказ. Разликујемо **унарне** (једна променљива) и **бинарне** (две променљиве) логичке операције.

Дефиниција2. Нека је задат исказ p. **Негација исказа p**, у ознаци $\neg p$, је тачан исказ ако је исказ p нетачан, а нетачан исказ ако је исказ p тачан. Чита се “не p”, “није p”.

p	$\neg p$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

Дефиниција3. Нека су задати исказ p и исказ q. **Конјункција исказа p и исказа q**, у ознаци $p \wedge q$, је исказ који је тачан само када су тачни и исказ p и исказ q. У свим осталим случајевима конјункција исказа p и исказа q је нетачна. Чита се као p и q.

p	q	$p \wedge q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Дефиниција4. Нека су задати исказ p и исказ q. **Дисјункција исказа p и исказа q**, у ознаци $p \vee q$, је исказ који је нетачан само када су нетачни и исказ p и исказ q. У свим осталим случајевима дисјункција исказа p и исказа q је тачна. Чита се као p или q.

p	q	$p \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Дефиниција5. Нека су задати исказ p и исказ q. **Импликација исказа p и исказа q**, у ознаци $p \Rightarrow q$, је исказ који је нетачан само када је исказ p тачан а исказ q нетачан. У свим осталим случајевима импликација исказа p и исказа q је тачна. Чита се на неки од следећих начина: p имплицира q, из p следи q, p је довољан услов за q, q је потребан услов за p.

p	q	$p \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Дефиниција6. Нека су задати исказ p и исказ q. **Еквиваленција исказа p и исказа q**, у ознаци $p \Leftrightarrow q$, је исказ који је тачан када оба исказа имају исте истинитосне вредности (оба тачна, или оба нетачна). У свим осталим случајевима еквиваленција исказа p и исказа q је нетачна. Чита се се на неки од следећих начина: p је еквивалентно са q, важи p ако и само ако важи q, услов p је потребан и довољан услов за q.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Сложене реченице које су формиране од неких исказа помоћу логичких операција јесу **исказне формуле**.

Дефиниција7. Исказна формула која је тачна за све вредности својих исказних слова назива се **таутологија**.

Редослед извођења операција: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Задаци

1. Дати су искази:

p: $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{10}{3}$

q: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{-37}{6}$

r: $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=7$

s: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}:\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

Одредити њихову тачност а затим и тачност формула:

а) $(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow s$

б) $p \vee s \Rightarrow (r \wedge p \Rightarrow q)$

Прво испитујемо тачност датих исказа.

p: $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{10}{3}$

$\left(\frac{3-2}{6}\right):\left(\frac{5-4}{20}\right)=\frac{10}{3}$

$\frac{1}{6}:\frac{1}{20}=\frac{10}{3}$

$\frac{1}{6}\cdot\frac{20}{1}=\frac{10}{3}$

$\frac{10}{3}=\frac{10}{3}$

Важи једнакост између леве и десне стране, па закључујемо да је p тачан исказ.

q: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{-37}{6}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}:\frac{1}{20}=\frac{-37}{6}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{20}{1}=\frac{-37}{6}$

$\frac{1}{2}-\frac{20}{3}=\frac{-37}{6}$

$\frac{3-40}{6}=\frac{-37}{6}$, тј. $\frac{-37}{6}=\frac{-37}{6}$. Дакле, и исказ q је тачан.

r: $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=7$

$\frac{1}{6}:\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=7$

$\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{1}-\frac{1}{5}=7$

$\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=7$

$\frac{10-3}{15}=7$

$\frac{7}{15}\neq 7$ Лева и десна страна нису

једнаке па закључујемо да исказ r није тачан.

s: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}:\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{1}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

$\frac{1}{2}-\frac{4}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

$\frac{15-40-6}{30}=\frac{2}{5}$

$\frac{-31}{30}\neq\frac{2}{5}$ Дакле, ни исказ s није тачан.

Испитајмо сада тачност датих формула. У задатој формули мењамо истинитосне вредности које смо добили за исказе p, q, r и s, и на њих примењујемо логичке операције.

а) $(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow s$

$(\top \vee (\top \wedge \bot)) \Rightarrow \bot$

$(\top \vee \bot) \Rightarrow \bot$

$\top \Rightarrow \bot$

$\bot$

б) $p \vee s \Rightarrow (r \wedge p \Rightarrow q)$

$(\top \vee \bot) \Rightarrow (\bot \wedge \top \Rightarrow \top)$

$\top \Rightarrow (\bot \Rightarrow \top)$

$\top \Rightarrow \top$

$\top$

2. Формирати истинитосне таблице следећих исказних формула:

Напомена. Истинитосна вредност дате формуле зависи само од интерпретације исказних слова која у њој учествују. Исказна слова узимају вредности из скупа $\{\top, \bot\}$. Ако су $p_1,\ldots,p_k$ исказна слова формуле A, тада она могу узети 2^k различитих вредности.

а) $(p \vee q) \vee q$

У овој формули имамо два исказа p и q, па ћемо имати 2^2 комбинација од $\top$ и $\bot$ (четири врсте у таблици). Идеја је да формулу "рашчланимо" на више исказа чије истинитосне вредности можемо одредити.

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

б) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$

в) $(\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

г) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

Сада у формули имамо три исказна слова, што нам говори да ћемо имати 2^3 комбинација $\top$ и $\bot$ (осам врста у таблици). Даљи поступак је исти као у претходним примерима.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

3. Испитати да ли је дата формула таутологија.

$(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$q \wedge \neg q$	$\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)$	$(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Видимо да је формула тачна за све вредности својих исказних слова, па по дефиницији закључујемо да дата формула јесте таутологија.

4. Доказати да је исказна формула $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ таутологија.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Показали смо да је формула тачна за све вредности својих исказних слова, тј. да је таутологија.

5. Доказати да је исказна формула $(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$ таутологија.

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

6. Доказати да је исказна формула $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ таутологија.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$

7. Дати су искази:

p: $-9 > -2$

q: -3 је цео број

r: Површина квадрата се рачуна по формули P=4a

За добијене истинитосне вредности исказа одредити истинитосну вредност исказне формуле

$\neg(\neg(\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow ((r \vee p) \Rightarrow q)$

Испитајмо прво истинитосне вредности датих исказа.

$\tau(p) = \bot$ $\tau(q) = \top$ $\tau(r) = \bot$

Испитајмо сада истинитост исказне формуле

$\neg(\neg(\neg(\bot) \wedge \top)) \Leftrightarrow ((\bot \vee \bot) \Rightarrow \top)$

$\neg(\neg(\top \wedge \top)) \Leftrightarrow (\bot \Rightarrow \top)$

$\neg(\neg(\top)) \Leftrightarrow \top$

$\neg(\bot) \Leftrightarrow \top$

$\top \Leftrightarrow \top$

$\top$

8. Методом свођења на противречност доказати да су следеће формуле таутологије.

а) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

б) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

в) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

Напомена. Да бисмо проверили да ли је исказна формула А таутологија, претпоставимо да А није таутологија, тј. да је за неке вредности исказних слова нетачна, и тражимо вредности које исказна слова морају имати да би формула била нетачна. Уколико пронађемо бар један такав низ вредности за исказна слова, то је пример који указује да формула није таутологија. Ако се докаже да такве вредности не постоје, онда је показано да је та формула таутологија. Овај метод је нарочито погодан уколико формула садржи велики број импликација, јер ако је импликација $p \Rightarrow q$ нетачна, онда p мора бити тачно, а q нетачно.

а) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

Дакле, као што је горе речено, крећемо од претпоставке да је дата исказна формула нетачна, односно треба да важи да је $\tau(p \Rightarrow (q \Rightarrow p)) = \bot$. Из истинитосне таблице следи

$\underline{\tau(p) = \top}$ и

$\tau(q \Rightarrow p) = \bot$, даље $\tau(q) = \top$ и $\underline{\tau(p) = \bot}$

Дакле, добили смо да је $\underline{\tau(p) = \top}$ и $\underline{\tau(p) = \bot}$, што је контрадикција, односно противречност па закључујемо да је наша претпоставка да је формула нетачна, лоша, па следи да је формула таутологија.

б) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Опет, претпоставимо супротно, да дата исказна формула није таутологија, тада

$\tau((p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)) = \bot$

Из истинитосне таблице следи $\tau(p \Rightarrow q) = \top$ и $\tau(\neg q \Rightarrow \neg p) = \bot$

Могућа су три случаја:

1) $\tau(p) = \top$ и $\tau(q) = \top$ и $\tau(\neg q) = \top$ и $\tau(\neg p) = \bot$

2) $\tau(p) = \bot$ и $\tau(q) = \top$ и $\tau(\neg q) = \top$ и $\tau(\neg p) = \bot$

3) $\tau(p) = \bot$ и $\tau(q) = \bot$ и $\tau(\neg q) = \top$ и $\tau(\neg p) = \bot$

Из $\tau(\neg q) = \top$ следи да је $\tau(q) = \bot$, а из $\tau(\neg p) = \bot$ следи да је $\tau(p) = \top$.

У сваком од ова три случаја долазимо до противречности:

1) $\tau(q) = \top$ и $\tau(q) = \bot$,

2) $\tau(q) = \top$ и $\tau(q) = \bot$ али и $\tau(p) = \bot$ и $\tau(p) = \top$

3) $\tau(p) = \bot$ и $\tau(p) = \top$, па смо доказали да је дата формула таутологија.

в) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

Претпоставимо супротно, да дата исказна формула није таутологија, тада

$\tau((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))) = \bot$

$\tau(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = \top$ и $\tau((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) = \bot$

Ако бисмо у овом примеру разматрали случајеве за $\tau(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = \top$, прво бисмо имали три случаја у којима је ова импликација тачна, па бисмо у сваком од та три случаја разматрали тачност импликације $(q \Rightarrow r)$.

Како би избегли компликације, прво ћемо из $\tau((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) = \bot$ одредити истинитосне вредности за p, q и r.

Дакле, из $\tau((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) = \bot$ следи

$\tau(p \Rightarrow q) = \top$ и $\tau(p \Rightarrow r) = \bot$ јер је то једини случај када је импликација нетачна, па из $\tau(p \Rightarrow r) = \bot$ следи $\underline{\boldsymbol{\tau(p) = \top}}$ и $\underline{\boldsymbol{\tau(r) = \bot}}$

Сада, како је $\tau(p \Rightarrow q) = \top$ и $\tau(p) = \top$ следи да је $\underline{\boldsymbol{\tau(q) = \top}}$.

Заменимо сада то што смо добили у $\tau(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) = \top$

$$\top \Rightarrow (\top \Rightarrow \bot) = \top$$

$$\top \Rightarrow \bot = \top$$

$$\bot = \top$$

Дакле, добили смо да је $\bot = \top$, што је противречно, па је наша претпоставка била лоша, тј. доказали смо да дата формула јесте таутологија.

Ви за вежбу можете пробати да испишете све случајеве и тако решите задатак.

г) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$

Претпоставимо супротно, да дата исказна формула није таутологија, тада

$\tau((p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)) = \bot$ па на основу таблице знамо да треба да важи

$\tau(p \Rightarrow q) = \top$ и $\tau(\neg p \vee q) = \bot$

За $\tau(p \Rightarrow q) = \top$ имамо три могућа случаја

1) $\tau(p) = \top$ и $\tau(q) = \top$

2) $\tau(p) = \bot$ и $\tau(q) = \top$

3) $\tau(p) = \bot$ и $\tau(q) = \bot$ а из $\tau(\neg p \vee q) = \bot$ закључујемо да је $\tau(\neg p) = \bot$ и $\boldsymbol{\tau(q) = \bot}$ јер је дисјункција исказа нетачна само ако су оба исказа нетачна. Како је $\tau(\neg p) = \bot$, знамо да ће бити $\boldsymbol{\tau(p) = \top}$.

У сваком од ова три случаја долазимо до противречности:

1) $\tau(q) = \top$ и $\tau(q) = \bot$,

2) $\tau(p) = \bot$ и $\tau(p) = \top$ али и $\tau(q) = \top$ и $\tau(q) = \bot$

3) $\tau(p) = \bot$ и $\tau(p) = \top$, па смо доказали да је дата формула таутологија.

д) $p \Rightarrow (p \vee q)$

Претпоставимо супротно, да дата исказна формула није таутологија, тада

$\tau(p \Rightarrow (p \vee q)) = \bot$ па на основу таблице знамо да треба да важи

$\boldsymbol{\tau(p)} = \top$ и $\tau(p \vee q) = \bot$

Из $\tau(p \vee q) = \bot$ следи да је $\boldsymbol{\tau(p)} = \bot$ и $\boldsymbol{\tau(q)} = \bot$. Дакле, добили смо да је $\boldsymbol{\tau(p)} = \top$ **и** $\boldsymbol{\tau(p)} = \bot$ што је противречно, па закључујемо да је претпоставка била лоша и да дата формула јесте таутологија.

ђ) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$

Претпоставимо супротно, да дата исказна формула није таутологија, тада

$\tau((p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)) = \bot$ па на основу таблице знамо да треба да важи

$\tau(p \Rightarrow q) = \bot$ и $\tau(q \Rightarrow p) = \bot$

Из $\tau(p \Rightarrow q) = \bot$ следи $\tau(p) = \top$ и $\tau(q) = \bot$, а из $\tau(q \Rightarrow p) = \bot$ следи $\tau(q) = \top$ и $\tau(p) = \bot$, што је противречно, па закључујемо да је претпоставка била лоша и да дата формула јесте таутологија.

е) $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$

Претпоставимо супротно, да дата исказна формула није таутологија, тада

$\tau(((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q) = \bot$ па на основу таблице знамо да треба да важи

$\tau((p \Rightarrow q) \wedge p) = \top$ и $\boldsymbol{\tau(q)} = \bot$

Сада, из $\tau((p \Rightarrow q) \wedge p) = \top$ закључујемо да је $\tau(p \Rightarrow q) = \top$ и $\boldsymbol{\tau(p)} = \top$.

Размотримо сада $\tau(p \Rightarrow q) = \top$. Имамо три могућа случаја:

1) $\tau(p) = \top$ и $\tau(q) = \top$

2) $\tau(p) = \bot$ и $\tau(q) = \top$

3) $\tau(p) = \bot$ и $\tau(q) = \bot$, па видимо да нам се у сваком случају јавља противречност, па је претпоставка била лоша и формула јесте таутологија.

ж) $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

Претпоставимо супротно, да дата исказна формула није таутологија, тада

$\tau(\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)) = \bot$ па на основу таблице знамо да треба да важи

$\tau(\neg p) = \top$ и $\tau(p \Rightarrow q) = \bot$

Како је $\tau(\neg p) = \top$ следи да је $\boldsymbol{\tau(p)} = \bot$, а из $\tau(p \Rightarrow q) = \bot$ следи да је $\boldsymbol{\tau(p)} = \top$ и $\tau(q) = \bot$.

Добили смо противречност, па закључујемо да је претпоставка била лоша и да формула јесте таутологија.

СКУПОВИ

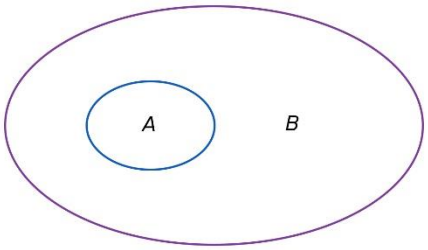
Скуп је један од основних појмова у математици, па се као такав не дефинише. Интуитивно, то је целина извесних објеката које повезује неко заједничко својство.
Скупове најчешће означавамо великим штампаним словима латинице: A, B, C, D…
Основна релација на скуповима јесте релација є (бити елемент). Реченицу „x је елемент скупа A“ („x припада A“) записујемо $x \in A$, док реченицу „x није елемент скупа A“ (x не припада A“) записујемо $x \notin A$.
Скупове задајемо на један од следећа два начина:
1) набрајањем његових елемената,
нпр. $A=\{1, 2, 3\}$
2) описом особине елеманата који га формирају
нпр. $A=\{x|p(x)\}$, где је p(x) особина елемената скупа A.
$A=\{x|x \in N \ \wedge \ 1 \leq x \leq 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Скупови се графички представљају помоћу тзв. **Венових дијаграма**.

$\forall$ - универзални квантификатор
$(\forall x)$ – „за свако x“
$\exists$ - егзистенцијални квантификатор
$(\exists x)$ – „постоји бар једно x“

$x \in [a, b]$ или $a \leq x \leq b$ (затворени интервал)
$x \in (a, b)$ или $a < x < b$ (отворен интервал)

Дефиниција 1. За скуп A кажемо да је подскуп скупа B, у ознаци $A \subseteq B$, ако је сваки елемент скупа A уједно и елемент скупа B. У том случају, за скуп B кажемо да је надскуп скупа A и то означавамо $B \supseteq A$.
$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Longrightarrow x \in B)$



Релација уведена овом дефиницијом зове се релација инклузије.

Скуп који нема ниједан елемент зове се празан скуп и означава се са $\emptyset$.
Празан скуп је подскуп сваког скупа.

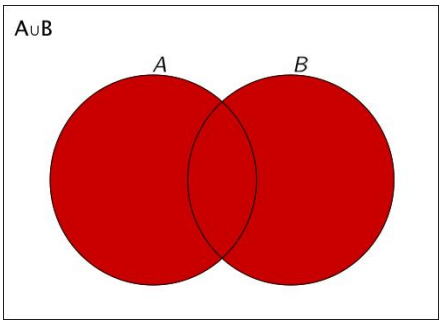
Дефиниција 2. Скуп A је једнак скупу B ако су им елементи исти, тј.

$A=B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ или $A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

Дефиниција 3. Партитивни скуп скупа A, у ознаци $\mathcal{P}(A)$, је скуп свих подскупова скупа A, укључујући и празан скуп.
$\mathcal{P}(A)=\{X | X \subseteq A\}$
Ако скуп A има n елемената, тада $\mathcal{P}(A)$ има 2^n елемената.
Пример $A=\{1,2,3\}$
$\mathcal{P}(A)=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
Дакле, $\mathcal{P}(A)$ има 8 односно 2^3 елемената.

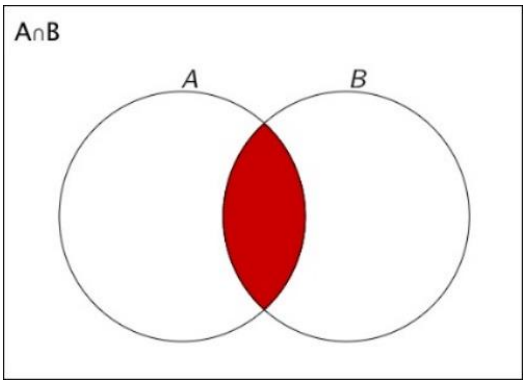
Операције са скуповима

Дефиниција 4. Унија скупова A и B, у ознаци $A \cup B$, је скуп свих елемената који припадају или скупу A или скупу B.
$A \cup B = \{x | x \in A \ \vee \ x \in B\}$

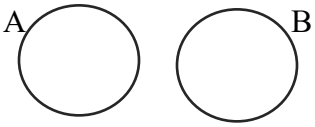


Пример. $A=\{1,2,3,4\}$
$B=\{3,4,5,6\}$
$A \cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$

Дефиниција 5. Пресек скупова A и B, у ознаци $A \cap B$, је скуп свих елемената који припадају скупу A и скупу B (заједнички елементи скупа A и скупа B).
$A \cap B = \{x | x \in A \ \wedge \ x \in B\}$

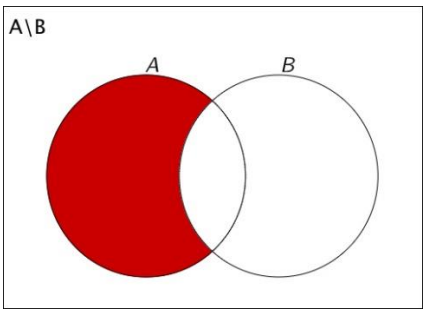


Ако је пресек два скупа празан скуп, онда за такве скупове кажемо да су дисјунктни скупови.



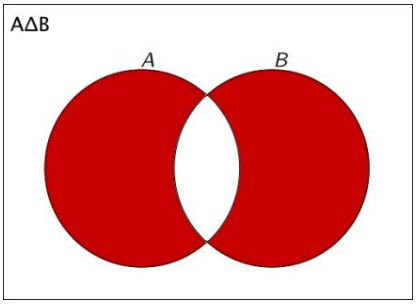
$A=\{1,3,5,7\}$
$B=\{2,4,6,8\}$
$A \cap B=\emptyset$
A и B су дисјунктни скупови

Дефиниција 6. Разлика редом скупова A и B, у ознаци $A\setminus B$, је скуп свих елемената x таквих да x припада скупу A и не припада скупу B.
$A\setminus B=\{x|x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$



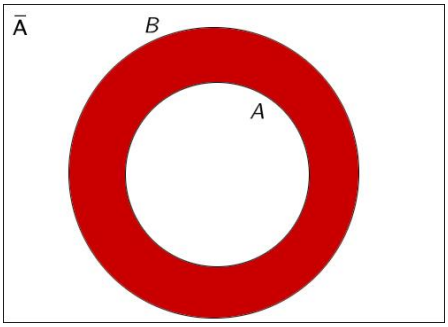
$B\setminus A=\{x|x \in B \ \wedge \ x \notin A\}$
Напомена: $A\setminus B \neq B\setminus A$
$A=\{1,2,3,4,5\}$
$B=\{3,4,5,6,7\}$
$A\setminus B=\{1,2\}$
$B\setminus A=\{6,7\}$

- Симетрична разлика
$A\triangle B=(A\setminus B) \cup (B\setminus A)$



Дефиниција 7. Нека је $A\subseteq B$. Комплемент скупа A у односу на B означава се са $C_B(A)$.

$C_B(A)=\{x|x \in B \ \wedge \ x \notin A\}$



Дефиниција 8. Декартов производ скупова A и B, у ознаци A x B, је скуп уређених парова (a,b) таквих да је први елемент из уређеног пара елемент првог скупа, а други елемент из уређеног пара је елемент другог скупа.
A x B=$\{(a,b)|a \in A \ \wedge \ b \in B\}$

Ако је A=B онда је A x A=A^2 – Декартов квадрат скупа A

A^2= A x A = $\{(a,b)|a \in A \ \wedge \ b \in A\}$
$\triangle_A \subseteq A^2$- дијагонала скупа A
$\triangle_A$=$\{(a,a)|a \in A\}$

Пример: A=$\{1,2,3\}$
$\triangle_A$=$\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

Задаци:

1. Одредити елементе скупова:

а) A=$\{x|x \in N \ \wedge \ 2<x<5\}$
Елементи скупа A су природни бројеви већи од 2 и мањи од 5.

Дакле, A=$\{3,4\}$

б) B=$\{x|x \in N \ \wedge \ x|12\}$

Елементи скупа B су сви природни бројеви који деле број 12.

Дакле, B=$\{1,2,3,4,6,12\}$

в) C=$\{x|x \in N \ \wedge \ x < 5 \ \wedge \ x \neq 3\}$

Елементи скупа C су сви природни бројеви мањи од 5 осим броја 3.

Дакле, C=$\{1,2,4\}$

г) D=$\{x|x \in Z \ \wedge \ x + 1 = 0\}$

Скуп D је скуп свих целих бројева x таквих да x+1=0, очигледно x = -1

Дакле, D=$\{-1\}$

2. Дат је скуп P={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

а) Одредити скупове A и B тако да су њихови елементи уједно и елементи скупа P и да је $A=\{x|x \geq 3\}$ а $B=\{x|x \leq 8\}$
б) Одредити скупове $A \cap B$ и $B \setminus A$

а) A={3,4,5,6,7,8,9}
B={0,1,2,3,4,5,6,7,8}

б) $A \cap B$={3,4,5,6,7,8}
$B \setminus A$={0,1,2}

3. Дат је скуп A={1,2,3,4,5,6,7}. Који од следећих исказа је тачан?

а) $(\forall x \in A)\ (x>0 \ \wedge \ x<0)\ \perp$
б) $(\forall x \in A)\ (x \in N \ \wedge \ x<8)$ T
в) $(\forall x \in A)\ (x \neq 3 \ \wedge \ x \leq 6)\ \perp$
г) $(\exists x \in A)\ (x \in 2N \ \wedge \ x>5)$ T
д) $(\exists x \in A)$ (x је прост број $\wedge$ $x>6$) T

4. Дати су скупови:

A={1,2,3,4,5,6}, B={0,1,2,3,4} и C={−2, −1,0,1,2}

Наћи скупове:
1) $A \cup B$={1,2,3,4,5,6} ∪ {0,1,2,3,4}={0,1,2,3,4,5,6}
јер на основу дефиниције унији два скупа припадају елементи који припадају или скупу A или скупу B.

2) $B \cap C$={0,1,2,3,4} ∩ {−2, −1,0,1,2}={0,1,2}
јер на основу дефиниције пресеку два скупа припадају елементи који припадају скупу B и скупу C.

3) $C \setminus A$={−2, −1,0,1,2} \ {1,2,3,4,5,6}={−2, −1,0}
јер на основу дефиниције разлици скупова C и A припадају сви елементи скупа C који нису елементи скупа A.

4) $C_S(A)$ где је $S=A \cup B$
$C_S(A)=S \setminus A$={0,1,2,3,4,5,6} \ {1,2,3,4,5,6}={0}

Скуп $S=A \cup B$ (пример 1), а на основу дефиниције комплемент скупа A у односу на скупа S једнак је разлици скупа S и скупа A.

5. Дати су скупови:
A={x|x је делилац броја 12}
B={x|x је делилац броја 20}
C={x|x је делилац броја 32}

Наћи скупове:
а) A\(B∪C)
б) C∪(A∩B)
в) (B\C)∩A

Одредимо прво елементе скупова A, B и C.
A={1,2,3,4,6,12}
B={1,2,4,5,10,20}
C={1,2,4,8,16,32}

а) A\(B∪C)={1,2,3,4,6,12} \ {1,2,4,5,8,10,16,20,32}={3,6,12}
б) C∪(A∩B)={1,2,4,8,16,32} ∪ {1,2,4}={1,2,4,8,16,32}
в) (B\C)∩A={5,10,20} ∩ {1,2,3,4,6,12}=∅

6. Дати су скупови A={1,3,4,6,7,8} и B={1,2,3,5,8,9}. Одредити A△B.

A△B=(A\B)∪(B\A)={4,6,7} ∪ {2,5,9}={2,4,5,6,7,9}

7. Дати су скупови A={1,2,3,6}, B={3,6} и C={1,3,5}. Проверити тачност:

A\(B\C)=(A\B)∪(A∩C)
Одредимо прво:
B\C={6}
A\B={1,2}
A∩C={1,3}
A\(B\C)=(A\B)∪(A∩C)
{1,2,3,6} \ {6}={1,2} ∪ {1,3}
{1,2,3}={1,2,3} T

8. Дати су скупови A={a, b, c} и B={α, β, γ}. Неки ученик је написао AxB={(a, α), (a, β), (γ, c), (b, α), (β, b), (b, γ), (c, α), (c, β), (c, γ)}. Да ли је ово исправно?

Није, јер (γ,c) ∉ AxB већ (γ,c) ∈ BxA; (β,b) ∉ AxB већ (β,b) ∈ BxA.

9. Дати су скупови A={a, c, d}, B={c, d, e}.
а) Одредити све елементе скупа $\mathcal{P}$(B)
б) Одредити све елементе скупа $\mathcal{P}$(A)
в) Одредити $\mathcal{P}$(A)∩ $\mathcal{P}$(B)

а) Скуп B има 3 елемента, следи скуп $\mathcal{P}$(B) имаће 2^3=8 елемената
$\mathcal{P}(B)=\{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{c, d, e\}\}$

б) Скуп A има 3 елемента, па ће $\mathcal{P}$(A) имати 2^3=8 елемената
$\mathcal{P}(A)=\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$

в)$\mathcal{P}(A)\cap \mathcal{P}(B)=\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\} \cap$
$\cap\{\emptyset,\{c\},\{d\},\{e\},\{c,d\},\{c,e\},\{d,e\},\{c,d,e\}\} = \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}\}$

10. Нека је
A={1,2,5}, B={2,3}, C={3,4}. Одредити:
а) A x B x C
б) B^3
в) A^2
г) $\triangle_A$
Решење:
а) Нека је A x B={(a, b)|a ∈ A, b ∈ B} скуп уређених парова, тако је A x B x C скуп уређених „тројки“ (a, b, c) таквих да је први елемент a елемент првог скупа A, други елемент b елемент скупа B, трећи елемент c елемент трећег скупа C.
AxBxC={(a, b, c)a ∈ A, b ∈ B, c ∈ C}=
{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,3), (1,3,4), (2,2,3), (2,2,4), (2,3,3), (2,3,4), (5,2,3), (5,2,4), (5,3,3), (5,3,4)}

б) B^3=BxBxB={(2,2,2), (2,2,3), (2,3,2), (2,3,3), (3,2,2), (3,2,3), (3,3,2), (3,3,3)}

в) A^2=AxA={(a, b)|a, b ∈ A}={(1,1), (1,2), (1,5), (2,1), (2,2), (2,5), (5,1), (5,2), (5,5)}

г) $\triangle_A$={(a, a)|a ∈ A}={(1,1), (2,2), (5,5)}

11. Дат је скуп A={x|x ∈ N ∧ $4x - 2(3x - 9) \leq -4(2x - 9)$} и скуп
B=$\left\{x \middle| x < 17 \wedge \frac{x}{6} - \frac{1-x}{4} > \frac{1+x}{3} + \frac{x-2}{24}\right\}$
Одредити:
а) (A△B)\B и
б) $\mathcal{P}$(A)

Решење: Да бисмо одредили елементе скупова A и B, прво ћемо решити одговарајуће неједначине.

$4x-2(3x-9) \leq -4(2x-9)$
$4x-6x+18 \leq -8x+36$
$4x-6x+8x \leq -18+36$
$6x \leq 18$
$x \leq \frac{18}{6}$
$x \leq 3$

онда је $A=\{x|x \in N \ \wedge \ x \leq 3\} = \{1,2,3\}$

$\frac{x}{6} - \frac{1-x}{4} > \frac{1+x}{3} + \frac{x-2}{24} \ / \cdot 24$

$24 \cdot \frac{x}{6} - 24 \cdot \frac{1-x}{4} > 24 \cdot \frac{1+x}{3} + 24 \cdot \frac{x-2}{24}$
$4x - 6 \cdot (1-x) > 8 \cdot (1+x) + (x-2)$
$4x - 6 + 6x > 8 + 8x + x - 2$
$4x + 6x - 8x - x > 6 + 8 - 2$
$x > 12$

онда је $B=\{x|x < 17 \ \wedge \ x > 12\} = \{13,14,15,16\}$

а) $A \setminus B=\{1,2,3\}$
$B \setminus A=\{13,14,15,16\}$
$A \triangle B=(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1,2,3,13,14,15,16\}$
$(A \triangle B) \setminus B=\{1,2,3,13,14,15,16\} \setminus \{13,14,15,16\}=\{1,2,3\}$

б) $\mathcal{P}(A)=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
$2^3=8$ елемената партитивног скупа јер скуп А има 3 елемента

12. Дати су скупови:
$A=\{x|x \in N \ \wedge \ x^2 - 5x + 6 = 0\}$
$B=\{y|y \in N \ \wedge \ 2 \leq y < 12 \ \wedge$ y је паран број$\}$
Одредити:
а) $(A \cup (B \setminus (B \cap A)))$
б) $B \times A$
Решење:
Да бисмо одрадили елементе скупа А потребно је решити квадратну једначину
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$x_{1/2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}$
$x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}$
$x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}$
$x_1=\frac{6}{2} = 3 \qquad x_2=\frac{4}{2} = 2$

Оба решења су природни бројеви што значи да је A={2,3}
Елементи скупа B су парни бројеви између бројева 2 и 12, укључујући 2 због знака веће или једнако.
Дакле, B={2,4,6,8,10}

а) B∩A={2}
B\(B∩A)={2,4,6,8,10} \ {2}={4,6,8,10}
(A∪(B\(B∩A)))={2,3} ∪ {4,6,8,10}={2,3,4,6,8,10}
Дакле, прво смо решили најмању заграду B∩A, затим (B\(B∩A)), и на крају највећу заграду (A∪(B\(B∩A))).

б)BxA={(2,2), (2,3), (4,2), (4,3), (6,2), (6,3), (8,2), (8,3), (10,2), (10,3)}

13. Дат је скуп AxB={(a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (a, 2), (b, 3), (c, 2), (c, 3)}. Одредити скупове A и B.
Решење:
Како је AxB={(x, y)|x ∈ A, y ∈ B}={(a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (a, 2), (b, 3), (c, 2), (c, 3)} то је A={a, b, c}, B={1,2,3}.

14. Дати су скупови:
A={x|$x^2 - 5x + 6 = 0$}
B={y|$y > 0 \ \wedge \ y^2 = 4$}
C={z|$0 < z < 10 \ \wedge$ z је паран број}
Одредити: (A△B) ∪ (B∪C)

Решење:
A={2,3} (ову квадратну једначину смо решили у задатку 12.)
$y^2 = 4$, дакле $y = 2$ или $y = -2$, али због услова $y > 0$, за елемент скупа B узимамо само позитивне y, па је B={2},
C={2,4,6,8}.
A△C=(A\C) ∪ (C\A)= {3} ∪ {4,6,8} = {3,4,6,8}
(A△B) ∪ (B∪C)= {3,4,6,8} ∪ {2,4,6,8} = {2,3,4,6,8}.

15. Нека је U={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12} дати универзални скуп. Одредите елементе скупова A, B, C ако је:
A=$\left\{x \,\middle|\, x \in U \ \wedge \ \frac{x+2}{3} \in U\right\}$
B=$\left\{y \,\middle|\, y \in U \ \wedge \ \frac{y}{2} + \frac{y}{5} \in U\right\}$
C=$\left\{z \,\middle|\, z \in U \ \wedge \ \left(\frac{z^2}{4} - 25\right) \in U\right\}$
а затим наћи
а) A∪(B∩C)

Решење:
Да бисмо одредили елементе скупа A за све елементе скупа U испитујемо да ли испуњавају услов да буду елементи скупа A.

За $x=0 \in U \Rightarrow \frac{0+2}{3} = \frac{2}{3} \notin U$

За $x=1 \in U \Rightarrow \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1 \in U \Rightarrow x=1 \in A$

За $x=2 \in U \Rightarrow \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3} \notin U$

За $x=3 \in U \Rightarrow \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3} \notin U$

За $x=4 \in U \Rightarrow \frac{4+2}{3} = \frac{6}{3} = 2 \in U \Rightarrow x=4 \in A$

За $x=5 \in U \Rightarrow \frac{5+2}{3} = \frac{7}{3} \notin U$

За $x=6 \in U \Rightarrow \frac{6+2}{3} = \frac{8}{3} \notin U$

За $x=7 \in U \Rightarrow \frac{7+2}{3} = \frac{9}{3} = 3 \in U \Rightarrow x=7 \in A$

За $x=8 \in U \Rightarrow \frac{8+2}{3} = \frac{10}{3} \notin U$

За $x=9 \in U \Rightarrow \frac{9+2}{3} = \frac{11}{3} \notin U$

За $x=10 \in U \Rightarrow \frac{10+2}{3} = \frac{12}{3} = 4 \in U \Rightarrow x=10 \in A$

За $x=11 \in U \Rightarrow \frac{11+2}{3} = \frac{13}{3} \notin U$

За $x=12 \in U \Rightarrow \frac{12+2}{3} = \frac{14}{3} \notin U$

На овај начин као што је показано испитујући за све елементе скупа U долазимо до закључка да су елементи скупа $A=\{1,4,7,10\}$.

При одређењу елемента B за сваки елемент из скупа U испитујемо да ли испуњава услов да буде елементи скупа B.

За $y=0 \in U \Rightarrow \frac{0}{2} + \frac{0}{5} = 0 \in U \Rightarrow y=0 \in B$

За $y=1 \in U \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{5+2}{10} = \frac{7}{10} \notin U$

За $y=2 \in U \Rightarrow \frac{2}{2} + \frac{2}{5} = \frac{10+4}{10} = \frac{14}{10} \notin U$

За $y=3 \in U \Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{3}{5} = \frac{15+6}{10} = \frac{21}{10} \notin U$

За $y=4 \in U \Rightarrow \frac{4}{2} + \frac{4}{5} = \frac{20+8}{10} = \frac{28}{10} \notin U$

За $y=5 \in U \Rightarrow \frac{5}{2} + \frac{5}{5} = \frac{25+10}{10} = \frac{35}{10} \notin U$

За $y=6 \in U \Rightarrow \frac{6}{2} + \frac{6}{5} = \frac{30+12}{10} = \frac{42}{10} \notin U$

За $y=7 \in U \Rightarrow \frac{7}{2} + \frac{7}{5} = \frac{35+14}{10} = \frac{49}{10} \notin U$

За $y=8 \in U \Rightarrow \frac{8}{2} + \frac{8}{5} = \frac{40+16}{10} = \frac{56}{10} \notin U$

За $y=9 \in U \Rightarrow \frac{9}{2} + \frac{9}{5} = \frac{45+18}{10} = \frac{63}{10} \notin U$

За $y=10 \in U \Rightarrow \frac{10}{2} + \frac{10}{5} = \frac{50+20}{10} = \frac{70}{10} = y=7 \in U \Rightarrow y=10 \in B$

За $y=11 \in U \Rightarrow \frac{11}{2} + \frac{11}{5} = \frac{55+22}{10} = \frac{77}{10} \notin U$

За $y=12 \in U \Rightarrow \frac{12}{2} + \frac{12}{5} = \frac{60+24}{10} = \frac{84}{10} \notin U$

Закључујемо да су елементи скупа B={0,10}.

Елементи скупа C су сви елементи скупа U који испуњавају дате услове.

За z=0 ∈ U $\Longrightarrow \frac{0^2}{4}$ - 25 = -25 ∉ U

За z=1 ∈ U $\Longrightarrow \frac{1^2}{4} - 25 = \frac{1}{4} - \frac{25}{1} = \frac{1-100}{4} = \frac{-99}{4}$ ∉ U

За z=2 ∈ U $\Longrightarrow \frac{2^2}{4} - 25 = \frac{4}{4} - 25 = 1 - 25 = -24$ ∉ U

За z=3 ∈ U $\Longrightarrow \frac{3^2}{4} - 25 = \frac{9}{4} - \frac{25}{1} = \frac{9-100}{4} = \frac{-91}{4}$ ∉ U

За z=4 ∈ U $\Longrightarrow \frac{4^2}{4} - 25 = \frac{16}{4} - 25 = 4 - 25 = -21$ ∉ U

За z=5 ∈ U $\Longrightarrow \frac{5^2}{4} - 25 = \frac{25}{4} - \frac{25}{1} = \frac{25-100}{4} = \frac{-75}{4}$ ∉ U

За z=6 ∈ U $\Longrightarrow \frac{6^2}{4} - 25 = \frac{36}{4} - 25 = 9 - 25 = -16$ ∉ U

За z=7 ∈ U $\Longrightarrow \frac{7^2}{4} - 25 = \frac{49}{4} - \frac{25}{1} = \frac{49-100}{4} = \frac{-51}{4}$ ∉ U

За z=8 ∈ U $\Longrightarrow \frac{8^2}{4} - 25 = \frac{64}{4} - 25 = 16 - 25 = -9$ ∉ U

За z=9 ∈ U $\Longrightarrow \frac{9^2}{4} - 25 = \frac{81}{4} - \frac{25}{1} = \frac{81-100}{4} = \frac{-19}{4}$ ∉ U

За z=10 ∈ U $\Longrightarrow \frac{10^2}{4} - 25 = \frac{100}{4} - 25 = 25 - 25 = 0$ ∈ U z=10∈C

За z=11 ∈ U $\Longrightarrow \frac{11^2}{4} - 25 = \frac{121}{4} - \frac{25}{1} = \frac{121-100}{4} = \frac{21}{4}$ ∉ U

За z=12 ∈ U $\Longrightarrow \frac{12^2}{4} - 25 = \frac{144}{4} - 25 = 36 - 25 = 11$ ∈ U z=12∈C

Закључујемо да су елементи скупа C={10, 12}

а) (B∩C)={0,10} ∩ {10,12}={10}
A∪(B∩C)={1,4,7,10} ∪ {10}={1,4,7,10}

б) (A∩C)={1,4,7,10} ∩ {10,12}={10}
B\(A∩C)={0,10} \ {10}={0}

16. Нека је:

A={x|x ∈ N $\wedge (x^2 - 1) = 0$}
B=$\left\{y \middle| y \in N \wedge y \leq 16 \wedge \left(\frac{y}{5} - 1\right) \in N\right\}$
C={z|z ∈ $N_0 \wedge 1 - (1 - z)^2 = 0$}

Одредити
а)AxBxC
б) C_SA где је S=A∪B∪C
в) (A∪C)\(A∩B)

Решење: Одредимо елементе скупа А, како је:

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x_1 = 1 \in N$

$x_2 = -1 \notin N$

A={1} Елементи скупа А су само природни бројеви, што значи да узимамо у обзир само решење x_1=1.

Сада одређујемо елементе скупа В тако што све природне бројеве мање и једнаке броју 16 замењујемо у израз $\left(\frac{y}{5} - 1\right)$. Решења овог израза која су природни бројеви су елементи скупа В.

$\frac{y}{5} - 1$

$y=1 \Longrightarrow \frac{1}{5} - 1 = \frac{1-5}{5} = \frac{-4}{5} \notin N$

$y=2 \Longrightarrow \frac{2}{5} - 1 = \frac{2-5}{5} = \frac{-3}{5} \notin N$

$y=3 \Longrightarrow \frac{3}{5} - 1 = \frac{3-5}{5} = \frac{-2}{5} \notin N$

$y=4 \Longrightarrow \frac{4}{5} - 1 = \frac{4-5}{5} = \frac{-1}{5} \notin N$

$y=5 \Longrightarrow \frac{5}{5} - 1 = 1 - 1 = 0 \notin N$

$y=6 \Longrightarrow \frac{6}{5} - 1 = \frac{6-5}{5} = \frac{1}{5} \notin N$

$y=7 \Longrightarrow \frac{7}{5} - 1 = \frac{7-5}{5} = \frac{2}{5} \notin N$

$y=8 \Longrightarrow \frac{8}{5} - 1 = \frac{8-5}{5} = \frac{3}{5} \notin N$

$y=9 \Longrightarrow \frac{9}{5} - 1 = \frac{9-5}{5} = \frac{4}{5} \notin N$

$y=10 \Longrightarrow \frac{10}{5} - 1 = 2 - 1 = 1 \in N$ $y=10 \in B$

$y=11 \Longrightarrow \frac{11}{5} - 1 = \frac{11-5}{5} = \frac{6}{5} \notin N$

$y=12 \Longrightarrow \frac{12}{5} - 1 = \frac{12-5}{5} = \frac{7}{5} \notin N$

$y=13 \Longrightarrow \frac{13}{5} - 1 = \frac{13-5}{5} = \frac{8}{5} \notin N$

$y=14 \Longrightarrow \frac{14}{5} - 1 = \frac{14-5}{5} = \frac{9}{5} \notin N$

$y=15 \Longrightarrow \frac{15}{5} - 1 = 3 - 1 = 2 \in N$ $y=15 \in B$

$y=16 \Longrightarrow \frac{16}{5} - 1 = \frac{16-5}{5} = \frac{11}{5} \notin N$

B={10,15}

Сада одређујемо елементе скупа С

$1 - (1 - z)^2 = 0$

$1 - (1 - 2z + z^2) = 0$

$1 - 1 + 2z - z^2 = 0$

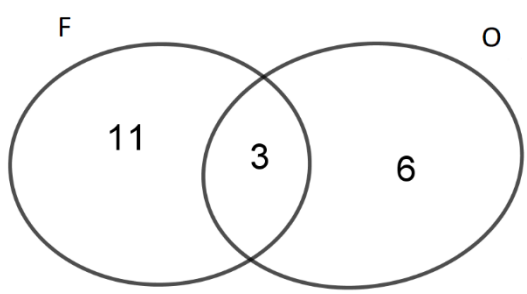
$2z - z^2 = 0$

$z(2 - z)=0$
$z_1=0 \quad \vee \quad 2-z=0$
$z_1=0 \quad \vee \quad z_2=2$
Како је $z \in N_0$ то значи да у обзир узимамо оба решења што значи да је $C=\{0,2\}$

а) $AxBxC=\{(a,b,c)|a \in A, b \in B, c \in C\}=\{(1,10,0),(1,10,2),(1,15,0),(1,15,2)\}$
б) $S=A \cup B \cup C=\{0,1,2,10,15\}$
$C_S A=S \setminus A=\{0,2,10,15\}$
в) $A \cup C=\{0,1,2\} \quad A \cap B=\{\emptyset\}$
$(A \cup C) \setminus (A \cap B)=\{0,1,2\}$

17. Од 32 ученика једног одељења њих 14 игра фудбал, 9 одбојку, а 3 и фудбал и одбојку. Колико ученика игра:
а) само фудбал
б) само одбојку
в) не игра ни фудбал ни одбојку?

Задаци овог типа решавају се помоћу Венових дијаграма. У пресеку два скупа F и O уписаћемо број 3 јер је то број ученика који играју и фудбал и одбојку, даље у скуп F уписујемо број ученика који игра фудбал али обратимо пажњу на то да смо 3 ученика већ уписали у пресеку, дакле у F уписујемо 14-3=11. Слично, у скуп O уписујемо 9-3=6.

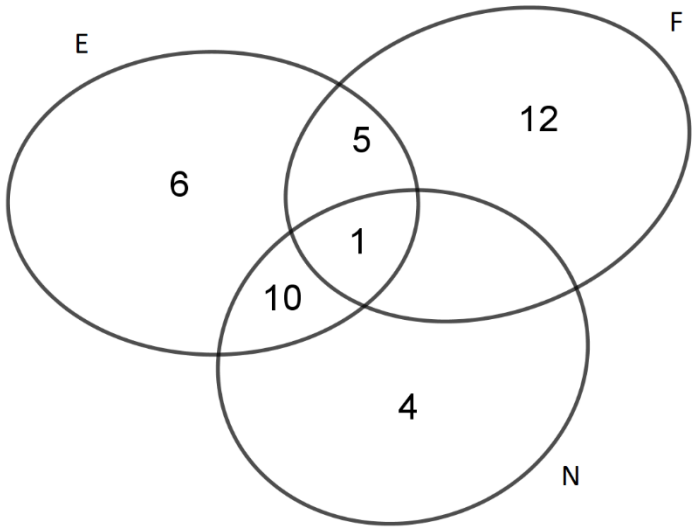


Сада, са Веновог дијаграма "читамо" решење.

а) само фудбал игра 11 ученика
б) само одбојку игра 6 ученика
в) не игра ни фудбал ни одбојку
32-(11+3+6)=32-20=12

18. На једном курсу страних језика сваки слушалац учи бар један од три страна језика (енглески, француски и немачки) и то: 18 слушалаца учи француски, 22 енглески, 15 немачки, 6 учи енглески и француски, 11 учи енглески и немачки и 1 слушалац учи сва три језика. Колико има слушалаца на том курсу, колико њих учи само два језика, колико њих учи енглески али не и немачки?

Овај задатак, као и претходни, решавамо помоћу дијаграма.

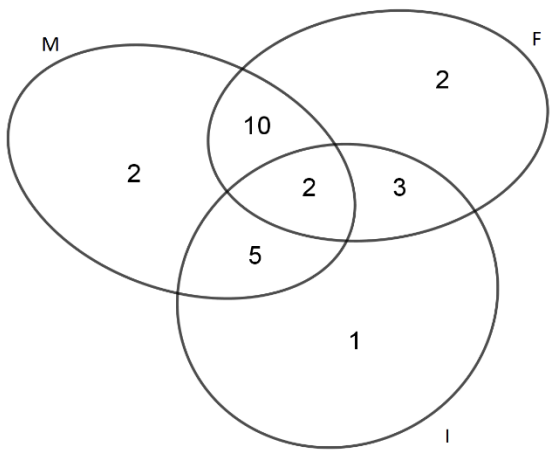


Прво ћемо у пресеку сва три скупа уписати број ученика који уче сва три језика, то је број 1.
Даље, у пресеку скупова Е и F уписујемо број ученика који уче енглески и француски, и таквих ученика је 6, али имамо у виду да смо једног већ уписали у пресеку сва три скупа па у пресеку Е и F уписујемо 6-1=5. Сада уписујемо колико ученика учи енглески и немачки, њих је 11 али опет одузимамо 1, јер смо једног ученика уписали у пресеку сва три скупа, дакле у пресеку Е и N уписујемо 10. Сада, упишимо у скуп Е колико ученика учи енглески, њих је 22 али имамо у виду да смо 10+5+1 већ уписали у пресецима, па у Е уписујемо 6, на исти начин попуњавамо F(12) и N(4).

Сада читамо решења. Укупно има 38 ученика (унија скупова Е, F и N), 15 ученика учи само два језика(пресек Е и F, и пресек Е и N) док укупно 11 ученика учи енглески али не и немачки(разлика скупова Е и N).

19. У једном одељењу од 30 ученика одговарало је: 19 ученика математику, 17 ученика физику, 11 ученика историју, 12 ученика математику и физику, 7 ученика математику и историју, 5 ученика физику и историју, 2 ученика сва три предмета. Колико ученика је одговарало историју, али не и математику? Колико ученика је одговарало два предмета? Колико ученика је одговарало само један предмет?

Задатак решавамо помоћу дијаграма.



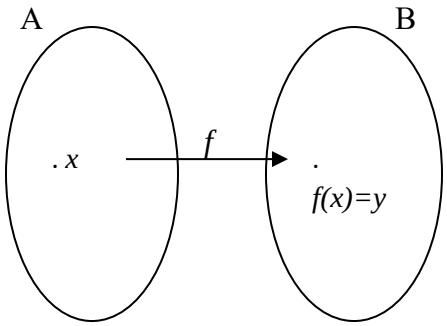
У пресеку сва три скупа уписујемо колико ученика је одговарало сва три предмета, то је број 2. Даље, у пресеку M и F уписујемо колико ученика је одговарало математику и физику, њих је 12 али 2 смо већ уписали па у пресеку ова два скупа уписујемо 10.
Аналогно попуњавамо пресеке скупова M и I, и скупова F и I.
На крају у M уписујемо колико ученика је одговарало математику, али водећи рачуна о томе да смо уписали ученике које су поред математике одговарали и друге предмете, па у M уписујемо 19-(10+5+2)=2. Аналогно попуњавамо скупове F(2) и I(1).
Сада, читамо решења.
Историју али не и математику је одговарало 4 ученика (разлика скупова I и M).
Два предмета је одговарало 10+5+3=18 ученика (пресеци скупова M и F, M и I, и F и I).
Само један предмет одговарало је 2+2+1=5 ученика.

ПРЕСЛИКАВАЊЕ (ФУНКЦИЈА)

Дефиниција: Нека су А и В дати скупови. Пресликавање (функција или трансформација) из скупа А у скуп В је сваки договор (правило, пропис), помоћу којег се <u>сваком</u> елементу $x \in A$ придружује <u>јединствен елемент</u> $y \in B$.

- Пресликавање се може дефинисати и на следећи начин:

Функција или пресликавање је свако придруживање елемената једног скупа елементима другог скупа при чему се сваки елемент првог скупа пресликава у тачно један елемент другог скупа.



- За записивање (означавање) функција обично се користи ознака $f : A \to B$ (ова ознака се чита: пресликавање f пресликава скуп А у скуп В).
- Скуп А се назива **домен** (област дефинисаности) пресликавања. Често се домен функције означава са $\mathcal{D}(f)$ **.**
- Скуп В се назива **кодомен** пресликавања. Кодомен пресликавања представља скуп свих слика $f(x)$ и означава са $f(A)$ или $\operatorname{Im} f$ и назива **област вредности пресликавања** *f*.

$$\operatorname{Im} f = f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}, \qquad f(A) \subseteq B.$$

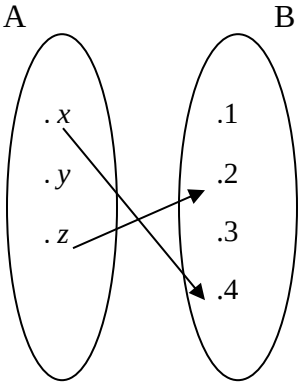
- Елементе скупа А називамо аргументи, независно променљиве, ликови, оригинали пресликавања или елементи домена.
- Елементи скупа В називају се слике, копије.

Дефиниција: За две функције $f : A \to B$ и $g : C \to D$ кажемо да су једнаке (у ознаци $f = g$) ако и само ако важи:

1. Функције f и g имају исти домен тј. $A = C$;
2. Функције f и g имају исти кодомен тј. $B = D$;
3. За $\forall x \in A$ важи $f(x) = g(x)$.

Пример: Испитати да ли следећи дијаграми дефинишу пресликавања из скупа $A = \{x, y, z\}$ у скуп $B = \{1,2,3,4\}$.

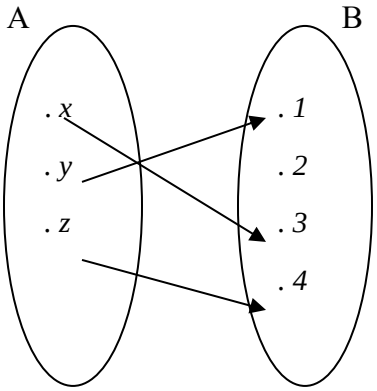
а)



$f_1 : A \to B$

Са дијаграма се види да $f_1 : A \to B$ није пресликавање, елементу $y \in A$ није придружен ни један елемент из скупа B што значи да дати дијаграм не дефинише пресликавање из скупа A у скуп B (није задовољена дефиниција да се <u>сваком</u> елементу из A придружује <u>јединствен елемент</u> из скупа B).

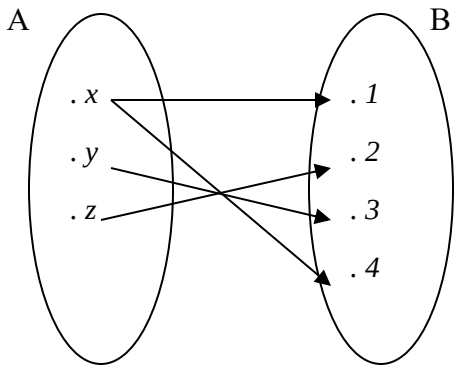
б)



$f_2 : A \to B$

Са дијаграма се види да $f_2 : A \to B$ јесте пресликавање зато што је испуњен услов да се <u>сваки</u> елемент домена пресликава у <u>јединствен</u> елемент кодомена.

ц)



$f_3 : A \to B$

На основу дефиниције пресликавања очигледно је да $f_3 : A \to B$ није пресликавање. Са дијаграма се види да су елементу $x \in A$ придружена два елемента из скупа B (x се пресликава у 1 и x се пресликава у 4). На основу дефиниције знамо да је дозвољено да се сваки елемент из домена A пресликава у <u>јединствен</u> елемент кодомена B.

Врсте пресликавања

<u>Сурјекција</u>

Дефиниција: Функција $f : A \to B$ зове се **сурјекција** или **„на“** пресликавање ако је $f(A) = B$ (област вредности функције f једнака је скупу B), што се може записати и на следећи начин:

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) \qquad y = f(x).$$

Најједноставније речено функција је сурјекција ако и само ако су **сви елементи кодомена слике бар једног елемента из домена** (дозвољено је и да је елемент из кодомена слика већег броја елемената из домена тј. да се више елемената из домена пресликавају у исти елемент кодомена).

Инјекција

Дефиниција: Функција $f : A \to B$ зове се **инјекција** или **„1-1“** пресликавање ако важи:

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \qquad (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2) \text{ односно}$$
$$(x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Односно, под инјекцијом се подразумева пресликавање које **различитим елементима домена придружује различите елементе кодомена.**

Бијекција

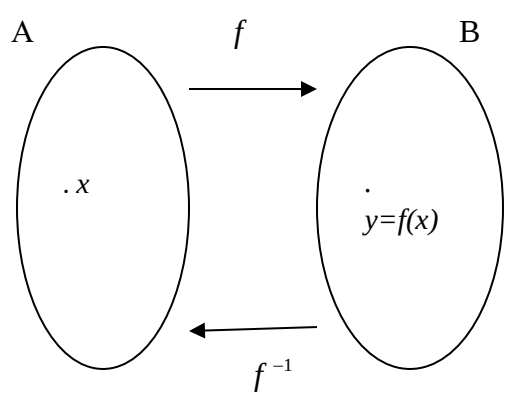
Дефиниција: Пресликавање $f : A \to B$ је **бијекција** ако је **инјекција** и **сурјекција**. Дакле, бијекцију f карактерише услов да је **сваки елеменат кодомена слика једног и само једног елемента из домена.**

- Бијективна функција или бијекција назива се **пермутација** скупа А када $f : A \to A$.

Дефиниција: Ако је пресликавање $f : A \to B$ бијекција, онда постоји пресликавање $f^{-1} : B \to A$ дефинисано са:

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y \quad \text{где је } x \in A, y \in B$$

које се назива **инверзно пресликавање** пресликавања f.



ЗАДАЦИ

1. Нека је $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ и $f:A\to R$ пресликавање дефинисано на следећи начин:

   а) $f(x)=x^2-1$

   б) $f(x)=x^3+2$

   Наћи област вредности датих функција и испитати да ли је f сурјекција.

   Решење:

   а) $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ - област вредности пресликавања f

   Како је $f(x)=x^2-1$ то значи да је:

$$f(-2)=(-2)^2-1=4-1=3$$
$$f(-1)=(-1)^2-1=1-1=0$$
$$f(0)=0^2-1=0-1=-1$$
$$f(1)=1^2-1=1-1=0$$
$$f(2)=2^2-1=4-1=3$$

   Сада је:

$$\begin{aligned} f(A)&=\{f(x)\mid x\in A\}\\ &=\{f(-2),f(-1),f(0),f(1),f(2)\}\\ &=\{3,0,-1,0,3\}\\ &=\{-1,0,3\}\end{aligned}$$

   Види се да је $f(A)\subset R$, на основу дефиниције следи да ово пресликавање није сурјекција (да би пресликавање било сурјекција потребно је да је $f(A)=R$).

   б) $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$- област вредности пресликавања f

   Како је $f(x)=x^3+2$ то значи да је:

$$f(-2)=(-2)^3+2=-8+2=-6$$
$$f(-1)=(-1)^3+2=-1+2=1$$
$$f(0)=0^3+2=0+2=2$$
$$f(1)=1^3+2=1+2=3$$
$$f(2)=2^3+2=8+2=10$$

Сада је:

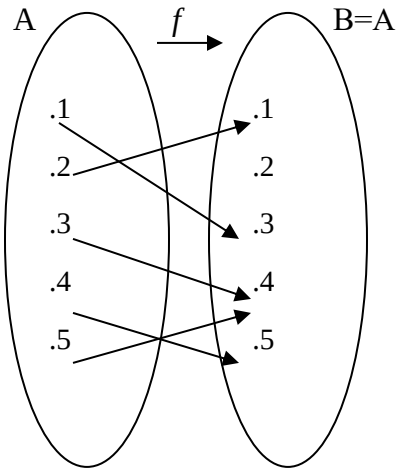
$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x) \mid x \in A\} \\ &= \{f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)\} \\ &= \{-6,1,2,3,10\} \end{aligned}$$

Види се да је $f(A) \subset R$, на основу дефиниције следи да ово пресликавање није сурјекција (да би пресликавање било сурјекција потребно је да је $f(A)=R$).

2. Проверити да ли је сурјекција пресликавање $f: A \to B$ при чему је $A=B=\{1,2,3,4,5\}$ дефинисано са: $f(1)=3,\ f(2)=1,\ f(3)=4,\ f(4)=5,\ f(5)=4.$

Решење:

<u>I начин</u>



Елемент $2 \in B$ није слика ни једног елемента из скупа А што значи да није остварен услов да је <u>сваки</u> елемент из скупа В (кодомена) слика <u>бар једног</u> елемента из скупа А (домена). Дато пресликавање није сурјекција.

<u>II начин</u>

Да ово пресликавање није сурјекција може се доказати и на други начин, помоћу области вредности пресликавања f.

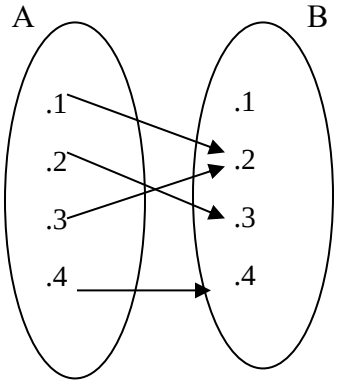
$$f(A)=\{f\{x\} \mid x\in A\} \text{ - област вредности пресликавања } f$$
$$=\{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\}$$
$$=\{3,1,4,5,4\}$$
$$=\{1,3,4,5\}$$

Види се да је $f(A)\subset B$ што значи да пресликавање није сурјекција (да би пресликавање било сурјекција потребно је да буде $f(A)=B$).

3. Проверити да ли је инјекција, сурјекција и бијекција пресликавање:
   а) $f: A\to B$ где је $A=B=\{1,2,3,4\}$ дефинисано са: $f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=2,\ f(4)=4.$
   б) $f: N\to Q$ дефинисано са $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$.

Решење:

а)



<u>Инјекција</u>

Елементи 1 и 3 из скупа А пресликавају се у исти елемент 2 из скупа В, што значи да није задовољена дефиниција инјекције да <u>различити оригинали имају различите слике.</u> Ово пресликавање није инјекција.

Сурјекција

Елемент 1 из скупа B није слика ни једног елемента из скупа A што значи да дато пресликавање није сурјекција. Да би пресликавање било сурјекција потребно је да сваки елемент из кодомена буде слика бар једног (може и више елемената) из домена.

Бијекција

Знамо да је пресликавање бијекција ако је инјекција и сурјекција, како ово пресликавање није инјекција ни сурјекција то значи да није ни бијекција.

(У неким случајевима где је пресликавање инјекција али није сурјекција или обрнуто јесте сурјекција али није инјекција такво пресликавање није ни бијекција. За бијекцију је неопходно да буде и инјекција и сурјекција).

б)

Инјекција

За проверу инјекције искористићемо дефиницију инјекције да је

$(\forall x_1, x_2 \in A)$ $\quad (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$ односно

$(x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Претпоставићемо да су једнаке слике тј. да је $f(x_1) = f(x_2)$, докажимо да су једнаки и оригинали тј. $x_1 = x_2$.

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2}$$
$$x_1(1+x_2) = x_2(1+x_1)$$
$$x_1 + x_1x_2 = x_2 + x_2x_1$$
$$x_1 = x_2$$

Ово пресликавање јесте инјекција јер из претпоставке да су једнаке слике добили смо да су једнаки и оригинали.

Сурјекција

$f : N \to Q$ где је $N = \{1,2,3,...\}$ скуп природних бројева а Q скуп рационалних бројева (скуп бројева који могу да се представе у облику разломка).

Како је $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ то за $x = 1 \in N \Rightarrow \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \in Q,$

$$x = 2 \in N \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} \in Q,$$

$$x = 3 \in N \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4} \in Q,$$

.

.

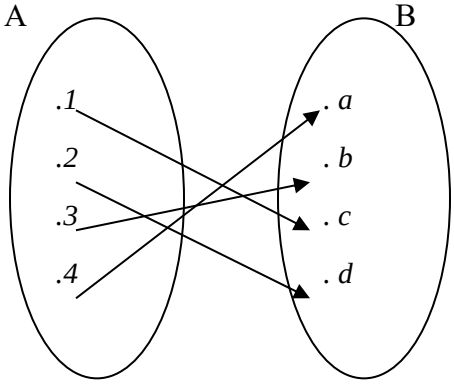
$$f(N) = \{f(x) \mid x \in N\}$$

$$= \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \ldots\right\}$$

Како је $f(N) \subset Ra$ ово пресликавање није сурјекција.

Како пресликавање јесте инјекција али није сурјекција то значи да није бијекција.

4. Нека је $f : A \to B$ пресликавање дефинисано дијаграмом. Испитати да ли је дато пресликавање бијекција, ако јесте наћи инверзно пресликавање f^{-1}.



Решење:

Да би пресликавање било бијекција потребно је према дефиницији да <u>сваки</u> елемент из кодомена B буде слика <u>јединственог</u> елемента из домена A. Са дијаграма који је дат у задатку се види да овај услов јесте задовољен што значи да пресликавање f јесте бијекција.

Ако пресликавање $f : A \to B$ јесте бијекција то према дефиницији следи да постоји инверзно пресликавање $f^{-1} : B \to A$.

Како је $f(1) = c \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(c) = 1$

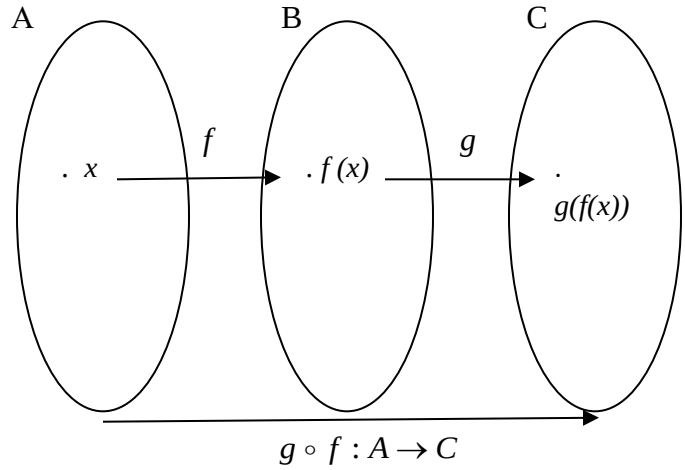
$f(2) = d \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(d) = 2$

$f(3) = b \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(b) = 3$

$f(4) = a \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(a) = 4.$

ПРОИЗВОД ПРЕСЛИКАВАЊА

<u>Дефиниција</u>: Нека су A, B и C непразни скупови и $f : A \to B$, $g : B \to C$. Тада пресликавање $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ такво да $g \circ f : A \to C$ називамо <u>производ, композиција или сложена функција</u> пресликавања f и g.



У скупу A постоји елемент x који се пресликавањем f пресликава у елемент $f(x)$ у скупу B. У овом случају елемент x је оригинал и он припада скупу A, односно домену пресликавања. Елемент $f(x)$ је слика елемента x и он припада скупу B, односно кодомену пресликавања f.

Ако сада посматрамо пресликавање g видимо да је домен овог пресликавања скуп B, а кодомен пресликавања скуп C тј. $g : B \to C$. Сада је елемент $f(x)$ који се налази у домену B оригинал, а елемент $g(f(x))$ је његова слика која припада скупу C.

ЗАДАЦИ

1. Функције $f: R \to R$ и $g: R \to R$ дефинисане су на следећи начин:

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = 3x + 5.$$

Наћи: $(g \circ f)(1)$, $(g \circ f)(-2)$, $(f \circ g)(-1)$, $(f \circ g)(a)$.

<u>Решење:</u> На основу дефиниције производа пресликавања имамо да је $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, сада је:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\underbrace{2x+1}_{f(x)}) = 3(2x+1) + 5 = 6x + 3 + 5 = 6x + 8$$

Сада је $(g \circ f)(1) = 6 \cdot 1 + 8 = 14$ (уместо x замењујемо 1)

$(g \circ f)(-2) = 6 \cdot (-2) + 8 = -12 + 8 = -4$ (уместо x замењујемо -2)

На основу дефиниције производа пресликавања је:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+5) = 2(3x+5) + 1 = 6x + 10 + 1 = 6x + 11$$

За $x = -1$ је $(f \circ g)(-1) = 6 \cdot (-1) + 11 = -6 + 11 = 5$

За $x = a$ је $(f \circ g)(a) = 6 \cdot a + 11$ при чему је $a = const.$

2. Функције $f: R \to R$ и $g: R \to R$ дефинисане су на следећи начин:

$$f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = x^2 - 2x.$$

Наћи: $(g \circ f)(5)$, $(g \circ f)(-2)$, $(f \circ g)(3)$, $(f \circ g)(-4)$.

<u>Решење</u>: На основу дефиниције производа пресликавања имамо да је $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, сада је:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = (x^2+1)^2 - 2(x^2+1) = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2 - 2x^2 - 2$$
$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 2 = x^4 - 1$$

$(x^2+1)^2$ се решава помоћу формуле за квадрат бинома:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Сада је $(g \circ f)(5) = 5^4 - 1 = 625 - 1 = 624$ (x замењујемо са 5)

$$(g \circ f)(-2) = (-2)^4 - 1 = 16 - 1 = 15.$$

На основу дефиниције производа пресликавања је:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2x) = (x^2 - 2x)^2 + 1 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot (-2x) + (-2x)^2 + 1$$
$$= x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$$
$$(f \circ g)(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 + 1 = 81 - 108 + 36 + 1 = 118 - 108 = 10$$
$$(f \circ g)(-4) = (-4)^4 - 4(-4)^3 + 4(-4)^2 + 1 = 256 + 256 + 64 + 1 = 577$$

Овде је $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

Док је $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$

Негативан број на непарном степену је негативан.

Негативан број на парном степену је позитиван.

Непарни степени су 1,3,5,...

Парни степени су 2,4,6,...

3. Нека су $f(x)=2x+1$ и $g(x)=x^2+x+1$. Одредити: $(g\circ f)(x)$, $(f\circ g)(x)$, $(g\circ g)(x)$, $(f\circ f)(x)$.

<u>Решење:</u>

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=(2x+1)^2+(2x+1)+1=4x^2+4x+1+2x+1+1$$
$$=4x^2+6x+3$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+x+1)=2(x^2+x+1)+1=2x^2+2x+2+1=2x^2+2x+3$$
$$(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2+x+1)=(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)+1$$
$$=(x^2+x+1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)+1$$
$$=(x^4+x^3+x^2+x^3+x^2+x+x^2+x+1)+x^2+x+2$$
$$=x^4+2x^3+3x^2+2x+1+x^2+x+2$$
$$=x^4+2x^3+4x^2+3x+3$$
$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x+1)=2(2x+1)+1=4x+2+1=4x+3.$$

4. Пресликавања f и g дефинисана су на следећи начин:
$$f(x)=x^2-4x+5,\quad g(x)=4x+5$$
Одредити $f^2(x)$ и $g^2(x)$.

<u>Решење</u>:

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x^2-4x+5)=(x^2-4x+5)^2-4(x^2-4x+5)+5$$
$$=(x^2-4x+5)(x^2-4x+5)-4x^2+16x-20+5$$
$$=x^4-4x^3+5x^2-4x^3+16x^2-20x+5x^2-20x+25-4x^2+16x-15$$
$$=x^4-8x^3+22x^2-24x-10$$

$$g^2(x)=(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(4x+5)=4(4x+5)+5=16x+20+5=16x+25.$$

5. За пресликавања $f(x)=4x-6$ и $g(x)=3x^2+4x$ наћи:

а) $f(g(x))$ ц) $f(2+f(1))$

б) $g(-10x+5f(x))$ д) $g(x+f(0))$.

<u>Решење:</u>

а) $f(g(x))=f(3x^2+4x)=4(3x^2+4x)-6=12x^2+16x-6$

б) $g(-10x+5f(x))=g(-10x+5(4x-6))=g(-10x+20x-30)=g(10x-30)$

$$=3(10x-30)^2+4(10x-30)=3(100x^2-600x+900)+40x-120$$
$$=300x^2-1800x+2700+40x-120$$
$$=300x^2-1760x+2580$$

ц) $f(2+f(1))=f(2+4\cdot 1-6)=f(2+4-6)=f(0)=4\cdot 0-6=-6$

д) $g(x+f(0))=g(x+4\cdot 0-6)=g(x-6)=3(x-6)^2+4(x-6)$

$$=3(x^2-12x+36)+4x-24=3x^2-36x+108+4x-24$$
$$=3x^2-32x+84$$

6. Ако су дати скупови $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$ и $C=\{5,6,7\}$, и пресликавања $f:A\to B$ и $g:B\to C$ дефинисана са $f:\begin{pmatrix}123\\abc\end{pmatrix}$, $g:\begin{pmatrix}abc\\765\end{pmatrix}$. Одредити $g\circ f$.

<u>Решење</u>:

$g\circ f:A\to C$

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(a)=7$
$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(b)=6$
$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(c)=5$

$$g\circ f=\begin{pmatrix}123\\765\end{pmatrix}$$

Када је пресликавање дефинисано на следећи начин:

$$f:\begin{pmatrix}123\\abc\end{pmatrix}$$

Ово значи да се 1 пресликава у a, 2 се пресликава у b, а 3 се пресликава у c.

У првом реду су оригинали (1,2,3) док су у другом реду њихове слике (a,b,c).

Када се одређује нпр. $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = 7$

$f(1)$ се одређује из $f : \begin{pmatrix} 123 \\ abc \end{pmatrix}$, види се да се 1 пресликава у a

$g(a)$ се одређује из $g : \begin{pmatrix} abc \\ 765 \end{pmatrix}$, одавде се види да се a пресликава у 7

7. Нека су дати скупови $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b\}$ и $Z = \{d,e,k\}$. Дата су и пресликавања $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$ дефинисана на следећи начин:

$$g : \begin{pmatrix} 123 \\ abb \end{pmatrix}, \quad f : \begin{pmatrix} ab \\ ek \end{pmatrix}$$

Наћи производ пресликавања $h = f \circ g$.

<u>Решење</u>:

$h = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ $\qquad$ $h : X \to Z$

$h(1) = f(g(1)) = f(a) = e$
$h(2) = f(g(2)) = f(b) = k$
$h(3) = f(g(3)) = f(b) = k$

$$h : \begin{pmatrix} 123 \\ ekk \end{pmatrix}$$

8. Дате су функције f и g на следећи начин:

$$f : \begin{pmatrix} abc \\ rqp \end{pmatrix} \text{ и } g : \begin{pmatrix} pqr \\ uvz \end{pmatrix}$$

Одредити: $(g \circ f)(a)$, $(g \circ f)(b)$.

<u>Решење</u>:

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(r) = z$
$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(q) = v$

9. Дат је скуп $A=\{1,2,3,4,5\}$ и пресликавање $f: A \to A$ дефинисано на следећи начин:

$$f:\begin{pmatrix}12345\\23451\end{pmatrix}$$

Одредити: f^2, f^3 и f^{-1}.

<u>Решење</u>:

$$f^2(x)=(f\circ f)(x)=f(f(x))$$

$$f^2(1)=(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=3$$
$$f^2(2)=(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(3)=4$$
$$f^2(3)=(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(4)=5$$
$$f^2(4)=(f\circ f)(4)=f(f(4))=f(5)=1$$
$$f^2(5)=(f\circ f)(5)=f(f(5))=f(1)=2$$

$$f^2:\begin{pmatrix}12345\\34512\end{pmatrix}$$

Овде се у првом реду налазе редом елементи скупа А , у другом реду су слике датих елемената које смо добили израчунавањем.

$$f^3(x)=f\left(f^2(x)\right)$$
$$f^3(1)=f\left(f^2(1)\right)=f(3)=4$$
$$f^3(2)=f\left(f^2(2)\right)=f(4)=5$$
$$f^3(3)=f\left(f^2(3)\right)=f(5)=1$$
$$f^3(4)=f\left(f^2(4)\right)=f(1)=2$$
$$f^3(5)=f\left(f^2(5)\right)=f(2)=3$$

$$f^3:\begin{pmatrix}12345\\45123\end{pmatrix}$$

Када се одређује нпр. $f^3(1) = f\left(f^2(1)\right) = f(3) = 4$

$f^2(1)$ читамо из $f^2 : \begin{pmatrix} 12345 \\ 34512 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $f(3)$ читамо из $f : \begin{pmatrix} 12345 \\ 23451 \end{pmatrix}$

f^{-1}- инверзно пресликавање пресликавања f

$f^{-1}(1) = 5$
$f^{-1}(2) = 1$
$f^{-1}(3) = 2$
$f^{-1}(4) = 3$
$f^{-1}(5) = 4$

$$f^{-1} : \begin{pmatrix} 12345 \\ 51234 \end{pmatrix}$$

Када се одређује нпр. $f(1)$ из $f : \begin{pmatrix} 12345 \\ 23451 \end{pmatrix}$

онда се 1 из првог реда пресликава у 2 у другом реду (оригинали су у првом реду, слике у другом реду).

Када се одређује нпр. $f^{-1}(5)$ из $f : \begin{pmatrix} 12345 \\ 23451 \end{pmatrix}$

Код инверзног пресликавања оригинали су у другом реду, а њихове слике у првом реду што значи да се 5 пресликава у 4.

РЕЛАЦИЈЕ

<u>Дефиниција:</u> Нека су А и В непразни скупови. Скуп $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ назива се Декартов производ скупа А и скупа В.

- Декартов производ два скупа је скуп уређених парова таквих да је први елемент уређеног пара елеменат првог скупа, док је други елемент уређеног пара елеменат другог скупа.

<u>Дефиниција:</u> Релација ρ дужине n је непразан подскуп Декартовог производа n скупова. Када је $n = 2$ тада говоримо о **<u>бинарној релацији</u>**, дакле о релацији између елемента a са елементом b, односно о уређеном пару (a,b) из Декартовог производа $A \times B$.

<u>Дефиниција:</u> Нека су А и В дати скупови. Сваки непразан подскуп ρ Декартовог производа $A \times B$, тј. $\phi \neq \rho \subseteq A \times B$ назива се **<u>релација.</u>**

<u>Пример:</u> Примери релација су:

1) Релација једнакости бројева ($x = y$).
2) Релација „бити паралелан“ у скупу правих ($a \parallel b$).
3) Релација „мање или једнако“ у скупу реалних бројева ($\leq$).

<u>Дефиниција:</u> Сваки непразан подскуп ρ Декартовог квадрата $A^2 = A \times A$ назива се релација скупа А.

- Ако су елементи a и b у релацији то можемо записати на два начин:
  1) $a\rho b$ и читамо „ a је у релацији ρ са b“
  2) $(a,b) \in \rho$ и читамо „уређени пар (a,b) припада релацији ρ “
- Ако $(a,b) \notin \rho$ онда се каже „a није у релацији ρ са b“

<u>Дефиниција:</u> Особине релације ρ у скупу А:

1. **<u>Рефлексивност</u>** $(\forall a \in A)$ $a\rho a$ или $(a,a) \in \rho$
   (елемент a је у релацији сам са собом)

2. **<u>Симетричност</u>** $(\forall a,b \in A)$ $a\rho b \Rightarrow b\rho a$ или $(a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho$
   (ако је a у релацији са b, онда је и b у релацији са a)

3. **<u>Антисиметричност</u>** $(\forall a,b \in A)$ $a\rho b \wedge b\rho a \Rightarrow a = b$
   или $(a,b) \in \rho \wedge (b,a) \in \rho \Rightarrow a = b$
   (ако је a у релацији са b и b у релацији са a онда је $a = b$)

4. **<u>Транзитивност</u>** $(\forall a,b,c \in A) \quad a\rho b \quad \wedge \quad b\rho c \quad \Rightarrow \quad a\rho c$

   или $\quad (a,b) \in \rho \quad \wedge \quad (b,c) \in \rho \quad \Rightarrow \quad (a,c) \in \rho$

   (ако је a у релацији са b и b у релацији са c онда је и a у релацији са c - или најједноставније ако је први елемент у релацији са другим, други у релацији са трећим, онда је и први у релацији са трећим).

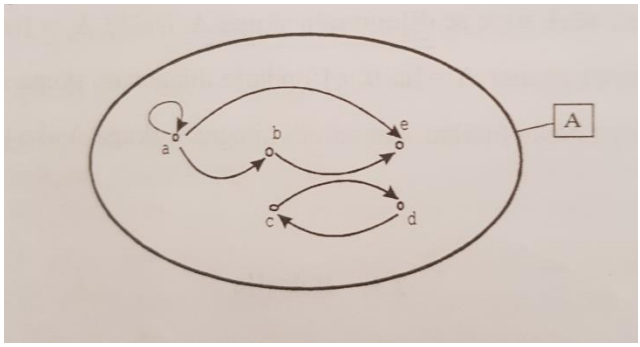
<u>Дефиниција:</u> Релација ρ која има особине: рефлексивност, симетричност и транзитивност назива се **<u>релација еквиваленције</u>** (Р-С-Т релација).

<u>Дефиниција:</u> Релација ρ која има особине: рефлексивност, антисиметричност и транзитивност назива се **<u>релација поретка</u>** (Р-А-Т релација).

Пример: Релација „$\leq$“ (мање или једнако) у скупу природних бројева N је релација поретка јер важи:

1) $x \leq x, \quad (\forall x \in N)$ рефлексивност;
2) $(x \leq y) \quad \wedge \quad (y \leq x) \quad \Rightarrow \quad x = y, \quad (\forall x, y \in N)$ антисиметричност;
3) $(x \leq y) \quad \wedge \quad (y \leq z) \quad \Rightarrow \quad (x \leq z) \quad (\forall x, y, z \in N)$ транзитивност.

- Релација ρ скупа А може се представити на три начина:
  1) **Скупом** нпр. $\rho = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(2,5)\}$
  2) Графички помоћу **<u>графа релације</u>**
  3) **Таблично**



Граф релације

ρ	**a**	**b**	**c**
1	T	T	T
2	$\perp$	T	$\perp$
3	$\perp$	T	T

Таблица релације ρ

<u>Дефиниција:</u> Нека је ρ релација еквиваленције скупа А. Скуп А се разбија на такозване **<u>класе еквиваленције</u>** C_a где је $C_a = \{x \mid x \in A \wedge a\rho x\}$, тако да важи:

1) Унијом свих класа еквиваленције скупа А добија се скуп А
2) Сваки елемент из скупа А је елемент своје класе еквиваленције
3) Класе еквиваленције су дисјунктне тј. различите класе немају ни један заједнички елемент.

<u>Дефиниција:</u> Нека је ρ релација еквиваленције скупа А. Ако ρ раставља скуп А на дисјунктне подскупове - класе еквиваленције, тада скуп свих класа еквиваленције означавамо са $A_{/\rho}$ и називамо **<u>количник скуп</u>** или **<u>фактор скуп</u>**.

$$A_{/\rho} = \{C_a \mid a \in A\}$$

ЗАДАЦИ

1. У скупу $A = \{1,2,3,4\}$ дефинисана је релација:

$$a\rho b \quad \Leftrightarrow \quad a = 2b$$

Представи ову релацију помоћу скупа, графа и таблично.

Решење:

$A = \{1,2,3,4\}$

$A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

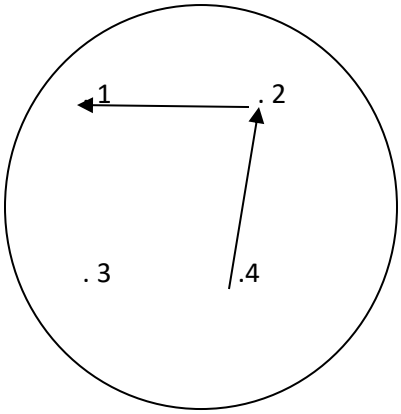
$$a\rho b \quad \Leftrightarrow \quad a = 2b$$

Сада формирамо релацију коју чине уређени парови за које је задовољен услов да је први елемент уређеног пара једнак двострукој вредности другог елемента. Водимо рачуна да су нам на располагању само елементи скупа А, што значи да нпр. (6,3) није из релације јер број 6 не припада скупу А.

$\rho = \{(a,b) \mid a = 2b\} = \{(2,1),(4,2)\}$ - скуповно представљање релације

$a = 2b = 2 \cdot 1 = 2$ $\qquad$ $b = 1$

Сада видимо да је добијена релација непразан скуп и подскуп Декартовог производа $A \times A$ тј. $\rho = \{(2,1),(4,2)\} \subset A \times A$. Ово значи да је задовољена дефиниција релације.



Граф релације

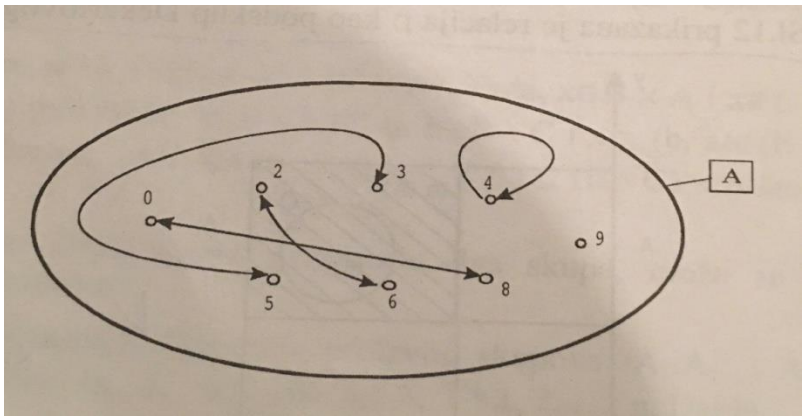
Како је $\rho = \{(2,1),(4,2)\}$ то значи да је за уређени пар (2,1) број 2 у релацији са 1, на графу релације стрелица иде од броја 2 према броју 1. Затим за уређени пар (4,2) значи да је 4 у релацији са 2 па је стрелица усмерена од броја 4 према броју 2.

ρ	**1**	**2**	**3**	**4**
1	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
2	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$
3	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
4	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$

Таблица релације

У заглављу таблице се уносе елементи скупа А. Како је $\rho = \{(2,1),(4,2)\}$ за први уређени пар (2,1) уписује се Т у пресеку друге врсте и прве колоне (друга врста одговара броју 2 и прва колона одговара броју 1). За уређени пар (4,2) уписује се Т у пресеку врсте која одговара броју 4 и колоне која одговара броју 2. Како наша релација нема више елемената на свим осталим местима се уписује $\perp$.

2. На основу графа релације датог у задатку одредити релацију ρ.



Решење:

Види се да је $A=\{0,2,3,4,5,6,8,9\}$.
$\rho=\{(0,8),(8,0),(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}$

Како је стрелица нпр. између 0 и 8 обострана то значи да је 0 у релацији са 8 тј. $(0,8)\in\rho$. Такође је и 8 у релацији са 0 па је и $(8,0)\in\rho$. Како стрелица иде од броја 4 према броју 4 то значи да је број 4 у релацији сам са собом тј. $(4,4)\in\rho$

3. На скупу $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ дефинисана је релација ρ на следећи начин:

$$x\rho y \quad\Leftrightarrow\quad x+y=8$$

Одредити релацију ρ.

Решење: $\rho=\{(x,y)\mid x+y=8\}=\{(0,8),(8,0),(1,7),(7,1),(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}$**.**

4. На скупу $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ дефинисана је релација ρ на следећи начин:

$$x\rho y \quad\Leftrightarrow\quad y>x$$

Одредити релацију ρ.

Решење: $\rho=\{(x,y)\mid y>x\}=$**{**$(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$
$(2,7),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(4,5),(4,6),(4,7),(5,6),(5,7),(6,7)$**}.**

Овде су уређени парови облика (x,y) а релација је таква да је $y>x$ што значи да је други елемент уређеног пара већи од првог, тај услов је задовољен нпр. код (1,2) али није задовољен код нпр. (2,1).

x ↘ $y>x$

x ↙ ↘ y – овде y није веће од x

5. Нека је дат скуп $E = \{1,2,3,4\}$ и на њему дефинисана релација

$$\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$$

Испитати да ли је релација ρ релација еквиваленције.

Решење:

Да би релација била релација еквиваленције према дефиницији она мора да буде рефлексивна, симетрична и транзитивна.

1) <u>Рефлексивност</u>

$(\forall x \in E) \quad (x,x) \in \rho$

$(1,1) \in \rho$;

$(2,2) \in \rho$;

$(3,3) \in \rho$;

$(4,4) \in \rho$. Важи рефлексивност.

2) <u>Симетричност</u>

$(\forall x, y \in E) \quad (x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho$

$(1,2) \in \rho \Rightarrow (2,1) \notin \rho$;

$(1,3) \in \rho \Rightarrow (3,1) \notin \rho$;

$(1,4) \in \rho \Rightarrow (4,1) \notin \rho$;

$(2,3) \in \rho \Rightarrow (3,2) \notin \rho$;

$(2,4) \in \rho \Rightarrow (4,2) \notin \rho$;

$(3,4) \in \rho \Rightarrow (4,3) \notin \rho$. Не важи симетричност.

3) <u>Транзитивност</u>

$(\forall x, y, z \in E) \quad (x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \rho \Rightarrow (x,z) \in \rho$

$(1,2) \in \rho \wedge (2,3) \in \rho \Rightarrow (1,3) \in \rho$;

$(1,2) \in \rho \wedge (2,4) \in \rho \Rightarrow (1,4) \in \rho$;

$(1,3) \in \rho \wedge (3,4) \in \rho \Rightarrow (1,4) \in \rho$;

$(2,3) \in \rho \wedge (3,4) \in \rho \Rightarrow (2,4) \in \rho$. Транзитивност важи.

Код транзитивности је важно:

$$(1,2)\in\rho \quad \wedge \quad (2,3)\in\rho \quad \Rightarrow \quad (1,3)\in\rho;$$

исти елементи

За ову релацију важи рефлексивност и транзитивност али не важи симетричност што значи да релација није релација еквиваленције.

6. Испитати да ли је релација ρ дефинисана на следећи начин:
$\rho=\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,3),(3,1),(3,5),(4,4),(4,2),(5,5),(5,1),(5,3)\}$
релација еквиваленције дефинисана на скупу $E=\{1,2,3,4,5\}$. Нацртати граф дате релације, одредити класе еквиваленције и количник скуп.

Решење:

1) Рефлексивност

$(\forall x\in E) \quad (x,x)\in\rho$
$(1,1)\in\rho;$
$(2,2)\in\rho;$
$(3,3)\in\rho;$
$(4,4)\in\rho;$
$(5,5)\in\rho.$ Важи рефлексивност.

2) <u>Симетричност</u>

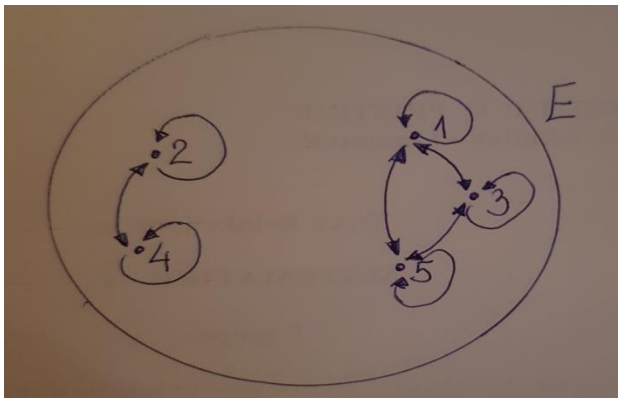
$(\forall x,y\in E) \quad (x,y)\in\rho \quad \Rightarrow \quad (y,x)\in\rho$
$(1,3)\in\rho \quad \Rightarrow \quad (3,1)\in\rho;$
$(1,5)\in\rho \quad \Rightarrow \quad (5,1)\in\rho;$
$(2,4)\in\rho \quad \Rightarrow \quad (4,2)\in\rho;$
$(3,5)\in\rho \quad \Rightarrow \quad (5,3)\in\rho.$ Важи симетричност.

3) <u>Транзитивност</u>

$$(\forall x, y, z \in E) \quad (x, y) \in \rho \ \wedge \ (y, z) \in \rho \ \Rightarrow \ (x, z) \in \rho$$

$(1,3) \in \rho \ \wedge \ (3,5) \in \rho \ \Rightarrow \ (1,5) \in \rho$;
$(1,5) \in \rho \ \wedge \ (5,3) \in \rho \ \Rightarrow \ (1,3) \in \rho$;
$(3,1) \in \rho \ \wedge \ (1,5) \in \rho \ \Rightarrow \ (3,5) \in \rho$;
$(3,5) \in \rho \ \wedge \ (5,1) \in \rho \ \Rightarrow \ (3,1) \in \rho$;
$(5,1) \in \rho \ \wedge \ (1,3) \in \rho \ \Rightarrow \ (5,3) \in \rho$;
$(5,3) \in \rho \ \wedge \ (3,1) \in \rho \ \Rightarrow \ (5,1) \in \rho$. Транзитивност важи.

Релација ρ јесте релација еквиваленције зато што важи рефлексивност, симетричност и транзитивност.



Граф релације

Са графа релације се јасно види да је скуп Е разврстан на две класе еквиваленције.

$$C_1 = \{1,3,5\} \quad \text{и} \quad C_2 = \{2,4\}$$

Скуп Е је унија добијених класа еквиваленције тј. $E = C_1 \cup C_2 = \{1,2,3,4,5\}$.

Са графа се види да су класе еквиваленције дисјунктни скупови-немају заједничких елемената. (Елементи једне класе су у релацији сами са собом и између себе, али нису у релацији са елементима друге класе).

$E_{/\rho} = \{C_1, C_2\} = \{\{1,3,5\}, \{2,4\}\}$ - количник скуп.

(Количник скуп је скуп свих класа еквиваленције датог скупа).

7. Одредити релацију еквиваленције чији је количник скуп:

$$S_{/\rho} = \{\{0\},\{1,4\},\{2,5\},\{3,6,7\}\}.$$

Решење:

Из $S_{/\rho} = \{\{0\},\{1,4\},\{2,5\},\{3,6,7\}\}$ се види да је $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

Уочавамо да су класе еквиваленције:

$C_0 = \{0\}$, $C_1 = \{1,4\}$, $C_2 = \{2,5\}$, $C_3 = \{3,6,7\}$.

Елементи једне класе су у релацији са собом и између себе тако да је:

$C_0 = \{0\} \Rightarrow (0,0) \in \rho$

$C_1 = \{1,4\} \Rightarrow (1,1) \in \rho;\ (4,4) \in \rho;\ (1,4) \in \rho;\ (4,1) \in \rho;$

$C_2 = \{2,5\} \Rightarrow (2,2) \in \rho;\ (5,5) \in \rho;\ (2,5) \in \rho;\ (5,2) \in \rho;$

$C_3 = \{3,6,7\} \Rightarrow (3,3) \in \rho;\ (6,6) \in \rho;\ (7,7) \in \rho;\ (3,6) \in \rho;\ (6,3) \in \rho;\ (3,7) \in \rho;\ (7,3) \in \rho;$

$(6,7) \in \rho;\ (7,6) \in \rho;$

На основу свега закључујемо да је:

$\rho = \{(0,0),(1,1),(4,4),(1,4),(4,1),(2,2),(5,5),(2,5),(5,2),(3,3),(6,6),(7,7),(3,6),(6,3),(3,7),(7,3),$

$(6,7),(7,6)\}$.

8. Само је једна од следећих релација на скупу $A = \{1,2,3\}$

а) $\rho_1 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(1,3),(3,3)\}$

б) $\rho_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(2,3),(1,3),(3,2),(3,1),(3,3)\}$

ц) $\rho_3 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}$

релација еквиваленције, која је то релација? Објаснити зашто остале релације нису релације еквиваленције.

Решење:

а) Релација ρ_1 јесте рефлексивна јер је $(1,1) \in \rho_1$, $(2,2) \in \rho_1$, $(3,3) \in \rho_1$.

Није симетрична јер нпр. $(1,2) \in \rho_1$ али $(2,1) \notin \rho_1$.

Није транзитивна јер нпр. $(1,2) \in \rho_1$ и $(2,3) \in \rho_1$ док $(1,3) \notin \rho_1$.

Значи да ρ_1 није релација еквиваленције.

б) Релација ρ_2 јесте рефлексивна јер $(1,1)\in\rho_2$, $(2,2)\in\rho_2$, али $(3,3)\in\rho_2$.

Релација ρ_2 јесте симетрична јер

$(1,2)\in\rho_2 \Rightarrow (2,1)\in\rho_2$;

$(1,3)\in\rho_2 \Rightarrow (3,1)\in\rho_2$;

$(2,3)\in\rho_2 \Rightarrow (3,2)\in\rho_2$.

Релација ρ_2 јесте транзитивна јер $(1,2)\in\rho_2$ и $(2,3)\in\rho_2 \Rightarrow (1,3)\in\rho_2$.

Значи да је ρ_2 релација еквиваленције.

ц) Релација ρ_3 није рефлексивна јер $(1,1)\in\rho_3$, $(3,3)\in\rho_3$ али $(2,2)\notin\rho_3$ што значи да није ни релација еквиваленције.

9. На скупу $A=\{0,1,2,3\}$ дефинисана је релација ρ на следећи начин:

а) $x\rho y \Leftrightarrow x+y>3$

б) $x\rho y \Leftrightarrow x+y\geq 3$

Испитати да ли су дате релације релације еквиваленције применом таблице.

Решење:

а)

ρ	**0**	**1**	**2**	**3**
0	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$
1	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
2	$\perp$	$\perp$	T	T
3	$\perp$	T	T	T

Таблица релације главна дијагонала

Рефлексивност

Из таблице се види да рефлексивност не важи, сваки елемент није у релацији сам са собом нпр. $(0,0)\notin\rho$. **Услов да важи рефлексивност је да на главној дијагонали буду све Т вредности.**

Симетричност

Из таблице се види да важи симетричност нпр. $(1,3) \in \rho \quad \Rightarrow \quad (3,1) \in \rho$ **. Ако је таблица релације симетрична у односу на главну дијагоналу то значи да важи симетричност.**

Антисиметричност

Из таблице уочавамо да важи $(1,3) \in \rho$ и $(3,1) \in \rho$ али $1 \neq 3$ што значи да не важи антисиметричност.

Транзитивност

Видимо да је $(1,3) \in \rho$ и $(3,2) \in \rho$ али $(1,2) \notin \rho$, што значи да не важи транзитивност.

Како не важи рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност то значи да дата релација није релације еквиваленције ни релација поретка.

б)

ρ	**0**	**1**	**2**	**3**
0	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
1	$\perp$	$\perp$	T	T
2	$\perp$	T	T	T
3	T	T	T	T

Таблица релације

Као и у примеру а) ова релација није рефлексивна јер сваки елемент није у релацији сам са собом. (На главној дијагонали нису све вредности T). Ова релација јесте симетрична јер је таблица релације симетрична у односу на главну дијагоналу. Није антисиметрична јер нпр. $(1,2) \in \rho$ и $(2,1) \in \rho$ али $1 \neq 2$. Ова релација није ни транзитивна јер нпр. $(0,3) \in \rho$ и $(3,1) \in \rho$ али $(0,1) \notin \rho$. На основу свега се закључује да дата релација није релација еквиваленције као ни релација поретка.

АЛГЕБАРСКЕ СТРУКТУРЕ

Дефиниција: Нека је G непразан скуп. Свако пресликавање $f : G \times G \to G$ назива се бинарна операција у скупу G.

- Ако се уређени пар (a,b) помоћу f пресликава у c онда се то бележи са $f(a,b) = c$ или $afb = c$. У алгебри се уместо f користе ознаке за операције као што су : $+, -, :, \circ, \div, \cdot, *, \Delta$.

Дефиниција: Групоид је најједноставнији пример алгебарске структуре. Нека је G непразан скуп и „$\circ$“ бинарна операција у G. **Групоид је** уређени пар $(G,\circ)$ за који важи затвореност тј. за свака два елемента a и b скупа G важи да је и $a \circ b \in G$.

Пример: Уређени парови $(N,+),(N,\cdot)$ су групоиди. Овде су посматране операције сабирања и множења у скупу природних бројева. Како знамо да је збир као и производ два произвољна природна броја природан број (операције сабирања и множења су затворене операције у скупу природних бројева), на основу тога закључујемо да су $(N,+),(N,\cdot)$ групоиди. Операције одузимање и дељење нису затворене у скупу природних бројева (разлика било која два природна броја, као и количник не мора да буде природан број нпр. $3-6=-3 \notin N$), што значи да уређени парови $(N,-),(N,:)$ нису групоиди. Операције одузимање и дељење кажемо да су делимично дефинисане у скупу природних бројева.

Дефиниција: Нека је G непразан скуп. За операцију „$\circ$“ у скупу G кажемо да је:

- **Комутативна** ако важи $a \circ b = b \circ a \quad (\forall a,b \in G)$
- **Асоцијативна** ако важи $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad (\forall a,b,c \in G)$

Дефиниција: Нека су на непразном скупу G дефинисане две операције „$\circ$“ и „$*$“. Ако је $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$ онда кажемо да је операција „$\circ$“ **лево дистрибутивна** према операцији „$*$“, а **десно дистрибутивна** ако важи $(a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$ за $(\forall a,b,c \in G)$

Дефиниција: Групоид $(G,\circ)$ је **асоцијативни групоид** или **полугрупа** или **семи група** ако је „$\circ$“ асоцијативна операција.

Дефиниција: За елемент $e \in G$ кажемо да је неутрални елемент групоида $(G,\circ)$ ако важи $a \circ e = e \circ a = a, \quad \forall a \in G.$

Теорема: У групоиду $(G,\circ)$ постоји највише један неутрални елемент.

Дефиниција: Полугрупа $(G,\circ)$ која има неутрални елемент назива се **моноид**.

Дефиниција: Нека је $(G,\circ)$ моноид. За елемент a^{-1} кажемо да је инверзни елемент елемента a ако важи $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Дефиниција: Уређени пар $(G,\circ)$ је **група** ако су задовољене аксиоме затворености, асоцијативности, ако има неутрални и инверзни елемент.

Дефиниција: Група је моноид у којем сваки елемент има инверз.

Дефиниција: Група $(G,\circ)$ зове се **Абелова** или **комутативна група** ако је операција „$\circ$“ комутативна.

Дефиниција: Уређена тројка $(G,+,\circ)$ назива се **прстен** ако је:

1) $(G,+)$ комутативна група
2) $(G,\circ)$ полугрупа
3) „+“ дистрибутивна у односу на „$\circ$“

ЗАДАЦИ

1. Нека је к фиксиран природан број већи од 1. Ако су „*“ и „$\circ$“ бинарне операције у скупу N одређене са $m*n=m+kn$ и $m\circ n=kmn$. Испитати да ли су ове операције комутативне, асоцијативне, а затим испитати да ли је операција „$\circ$“ дистрибутивна према операцији „*“.

Решење:

<u>Комутативност операције</u> „*“

$$m*n=n*m$$

$m*n=m+kn$

$n*m=n+km$ Закључујемо да операција „*“ није комутативна.

$m*n=n*m$ комутативни закон

Решава се лева страна једнакости $m*n=m+kn$

Решава се десна страна једнакости $n*m=n+km$

Упореде се резултати леве и десне стране једнакости и закључује да комутативност не важи.

<u>Комутативност операције</u> „$\circ$“

$$m\circ n=n\circ m$$

$m\circ n=kmn$
$n\circ m=knm$ Очигледно је да комутативни закон важи.

<u>Асоцијативност операције</u> „*“

$$(m*n)*p=m*(n*p)$$

$(m*n)*p=(m*n)+kp=m+kn+kp$

$m*(n*p)=m+k(n*p)=m+k(n+kp)=m+kn+k^2p$ Асоцијативност не важи.

Асоцијативност операције „$\circ$“

$$(m \circ n) \circ p = m \circ (n \circ p)$$

$$(m \circ n) \circ p = k(m \circ n)p = k(kmn)p = k^2 mnp$$

$$m \circ (n \circ p) = km(n \circ p) = km(knp) = k^2 mnp$$ Асоцијативност важи.

Дистрибутивност операције „$\circ$“ према операцији „$*$“

$$m \circ (n * p) = (m \circ n) * (m \circ p)$$

$$m \circ (n * p) = km(n * p) = km(n + kp) = kmn + k^2 mp$$

$$(m \circ n) * (m \circ p) = (m \circ n) + k(m \circ p) = kmn + k(kmp) = kmn + k^2 mp$$ Важи дистрибутивни закон.

2. Нека је G скуп реалних бројева, и нека је операција „$\circ$“ дефинисана са

$$a \circ b = \frac{1}{2}(a + b) \quad \text{за } (\forall a, b \in G).$$

Испитати да ли је алгебарска структура $(G, \circ)$ полугрупа.

Решење: Да би алгебарска структура била полугрупа потребно је да важи затвореност и асоцијативност.

1) Затвореност
Нека су $(a, b \in G)$, како је и $a \circ b \in G$ то значи да је затвореност задовољена.

2) Асоцијативност

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

$$(a \circ b) \circ c = \frac{1}{2}((a \circ b) + c) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a + b) + c\right) = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c$$

$$a \circ (b \circ c) = \frac{1}{2}(a + (b \circ c)) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{2}(b + c)\right) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c$$

Како резултати леве и десне стране једнакости нису једнаки то значи да асоцијативност не важи.

Како важи затвореност то значи да је уређени пар $(G,\circ)$ групоид, како смо доказали да асоцијативност не важи то значи да $(G,\circ)$ није полугрупа.

3. У скупу реалних бројева дефинисана је бинарна операција „*“ на следећи начин:

$$a*b=ab+2a+2b+2$$

Испитати да ли је $(R,*)$ група. Да ли је $(R,*)$ Абелова група?

Решење:

<u>Затвореност</u>

Нека су $a,b\in R$ онда је и $(a*b)\in R$ што значи да важи затвореност. Ако важи затвореност онда је $(R,*)$ групоид.

<u>Асоцијативност</u>

$$(a*b)*c=a*(b*c)$$

$$(a*b)*c=(a*b)c+2(a*b)+2c+2=(ab+2a+2b+2)c+2(ab+2a+2b+2)+2c+2$$

$$=abc+2ac+2bc+2c+2ab+4a+4b+4+2c+2$$

$$=abc+2ac+2bc+2ab+4a+4b+4c+6$$

$$a*(b*c)=a(b*c)+2a+2(b*c)+2=a(bc+2b+2c+2)+2a+2(bc+2b+2c+2)+2$$

$$=abc+2ab+2ac+2a+2a+2bc+4b+4c+4+2$$

$$=abc+2ab+2ac+2bc+4a+4b+4c+6$$

Асоцијативност важи.

Ако важи затвореност и асоцијативност онда је $(R,*)$ полугрупа (семигрупа).

<u>Неутрални елемент</u>

$a*e=e*a=a$ $\qquad$ e је неутрални елемент

$a * e = a$

$ae + 2a + 2e + 2 = a$

$ae + 2e = a - 2a - 2$

$e(a+2) = -a - 2$

$e(a+2) = -(a+2)$

$e = -\dfrac{a+2}{a+2}$

$e = -1$

Десни неутрални елемент.

$a * e = e * a = a$

Леви неутрални елемент

Десни неутрални елемент

$e * a = a$

$ea + 2e + 2a + 2 = a$

$ea + 2e = a - 2a - 2$

$e(a+2) = -a - 2$

$e(a+2) = -(a+2)$

$e = -\dfrac{a+2}{a+2}$

$e = -1$

Леви неутрални елемент.

Да би неутрални елемент постојао потребно је да леви неутрални елемент има исту вредност као и десни неутрални елемент.

Како смо добили исте вредности за леви и десни неутрални елемент то значи да неутрални елемент постоји и $e = -1$.

Како вази затвореност, асоцијативност и постоји неутрални елемент то значи да је $(R,*)$ моноид.

<u>Инверзни елемент</u>

$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

a^{-1} је инверзни елемент елемента a

e је неутрални елемент који смо већ одредили

$$a * a^{-1} = e$$
$$a * a^{-1} = -1$$
$$aa^{-1} + 2a + 2a^{-1} + 2 = -1$$
$$aa^{-1} + 2a^{-1} = -1 - 2 - 2a$$
$$a^{-1}(a+2) = -3 - 2a$$
$$a^{-1} = \frac{-2a-3}{a+2}$$
$$a^{-1} = -\frac{2a+3}{a+2}$$

Инверзни елемент постоји.

Ако је задовољена затвореност, асоцијативност, постоји неутрални и инверзни елемент онда је $(R,*)$ група.

<u>Комутативност</u>

$$a * b = b * a$$

$$a * b = ab + 2a + 2b + 2$$
$$b * a = ba + 2b + 2a + 2$$

Важи комутативност.

Ако важи затвореност, асоцијативност, неутрални, инверзни елемент и ако важи комутативност тада је $(R,*)$ комутативна или Абелова група.

4. Нека је групоид $(G,\cdot)$ коначан и дат следећом Келијевом таблицом. Испитати да ли је $(G,\cdot)$ комутативна група.

.	***a***	***b***	***c***
a	*a*	*b*	*c*
b	*b*	*c*	*a*
c	*c*	*a*	*b*

Решење:

Затвореност

Затвореност свакако важи зато што је у задатку дато да је $(G,\cdot)$ групоид (код групоида је задовољена затвореност).
Када се из Келијеве таблице испитује затвореност потребно је да у таблици фигуришу само елементи који су у заглављу таблице (a,b,c).

$\cdot$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{a}$	a	b	c
$\boldsymbol{b}$	b	c	a
$\boldsymbol{c}$	c	a	b

Заглавље таблице је означено црвеном бојом.

Асоцијативност

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$b \cdot c = a \cdot a$

$a = a$

$\cdot$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{a}$	a	b	c
$\boldsymbol{b}$	b	c	a
$\boldsymbol{c}$	c	a	b

Асоцијативност важи.

Неутрални елемент

.	***a***	***b***	***c***
a	*a*	*b*	*c*
b	*b*	*c*	*a*
c	*c*	*a*	*b*

Неутрални елемент се тражи у пресеку врсте и колоне у којима је распоред елемената исти као у заглављу таблице. Овде се види да је елемент *a* у пресеку што значи да је он неутрални елемент.

Инверзни елемент

За елемент *a* његов инверз је *a*

За елемент *b* његов инверз је *c*

За елемент *c* његов инверз је *b*.

Комутативност

.	***a***	***b***	***c***
a	*a*	*b*	*c*
b	*b*	*c*	*a*
c	*c*	*a*	*b*

Главна дијагонала је представљена стрелицом.

Ако је Келијева таблица симетрична у односу на главну дијагоналу онда важи комутативни закон. У овом случају комутативност је задовољена.

Како важи затвореност, асоцијативност, неутрални, инверзни елемент и комутативни закон то значи да је $(G,\cdot)$ Абелова или комутативна група.

ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ

Принцип математичке индукције

<u>Теорема</u>: Ако је тврђење које у својој формулацији садржи природан број n тачно за $n=1$ и ако из претпоставке да је тачно за $n=k$ следи да је тачно и за $n=k+1$, онда је то тврђење тачно за све природне бројеве.

ЗАДАЦИ

1. Методом математичке индукције доказати да за све природне бројеве важи:

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

Решење:

Метод математичке индукције састоји се из следећег:

1) **Доказује се да тврђење важи за** $n=1$
2) **Претпоставља се да тврђење важи за** $n=k$
3) **Доказује се да тврђење важи за** $n=k+1$**.**

1) Докажимо да важи за $n=1$

$2\cdot 1-1=1^2$

$2-1=1$

$1=1$

У тврђењу које је дато у задатку узимамо да је $n=1$

2) Претпоставка да тврђење важи за $n=k$

$1+3+5+...+(2k-1)=k^2$ (*)

У тврђењу које је дато у задатку узимамо да је $n=k$ и претпостављамо да је (*) тачна

3) Доказујемо да тврђење важи за $n = k+1$

Када у тврђење које је дато у задатку заменимо $n = k+1$ добија се

$$1+3+5+...+(2k-1)+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$$
$$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+2-1)=(k+1)^2$$
$$1+3+5+...+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$$

Потребно је доказати да ова једнакост заиста важи

На основу (*)

$$k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

$$k^2+2k+1=(k+1)^2$$
$$(k+1)^2=(k+1)^2$$

Знамо да је $(k+1)^2 = k^2+2k+1$ квадрат бинома.

2. Методом математичке индукције доказати да за све природне бројеве важи:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Решење:

1) За $n=1$

$$1=\frac{1(1+1)}{2}$$
$$1=1$$

2) Претпоставимо да важи за $n=k$

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2} \qquad (*)$$

3) Доказујемо да важи за $n=k+1$ тј. потребно је доказати да важи:

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$
$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

На основу (*) је

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

3. Методом математичке индукције доказати да за све природне бројеве важи:

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Решење:

1) За $n=1$ имамо

$$1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

$$1=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$$

$$1=1$$

2) Претпостављамо да важи за $n=k$ тј. нека је

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad (*) \qquad \text{(индуктивна претпоставка)}$$

3) Користећи индуктивну претпоставку доказујемо тачност за $n=k+1$ тј. доказујемо

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

На основу (*)

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)[2k^2+k+6k+6]}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Јер је

$$2k^2+7k+6=0$$

$$k_{1/2}=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 2\cdot 6}}{2\cdot 2}$$

$$k_{1/2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{4}$$

$$k_{1/2}=\frac{-7\pm 1}{4}$$

$$k_1=\frac{-7+1}{4}=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}$$

$$k_2=\frac{-7-1}{4}=\frac{-8}{4}=-2$$

Квадратна једначина облика $ax^2+bx+c=0$ може се представити у облику $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

где су x_1 и x_2 корени квадратне једначине.

$$2k^2+7k+6=2\left(k-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)(k-(-2))=2\left(k+\frac{3}{2}\right)(k+2)=(2k+3)(k+2)$$

4. Применом математичке индукције доказати да је

7^n-1 дељиво са 6.

Решење:

1) За $n=1$

$7^1-1=7-1=6$ дељиво са 6

2) Претпоставимо да важи за $n=k$

7^k-1 дељиво са 6 (*) (индуктивна претпоставка)

3) Докажимо да важи за $n=k+1$

$$7^{k+1}-1=7^k\cdot 7^1-1=6\cdot 7^k+7^k-1$$

Дељиво са 6 Дељиво са 6 на основу (*)

На основу правила степеновања
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ важи да је $7^k \cdot 7^1 = 7^{k+1}$

$6 \cdot 7^k + 7^k = 7 \cdot 7^k = 7^1 \cdot 7^k = 7^{k+1}$

5. Применом математичке индукције доказати да је
$4^n + 15n - 1$ дељиво са 3.

Решење:

1) За $n = 1$ имамо да је
$4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 4 + 15 - 1 = 18$ дељиво је са 3

2) Претпоставимо да важи за $n = k$
$4^k + 15k - 1$ претпоставка да је дељиво са 3 (*)

3) Докажимо да важи за $n = k + 1$ тј. докажимо да је
$4^{k+1} + 15(k+1) - 1$ дељиво са 3
Како је
$4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4^k \cdot 4^1 + 15k + 15 - 1 = 4^k + 3 \cdot 4^k + 15k + 15 - 1 =$
$4^k + 15k - 1 + 3 \cdot 4^k + 15 = 4^k + 15k - 1 + 3(4^k + 5)$

Дељиво са 3 на основу (*) Дељиво са 3 јер сваки број помножен са 3 је и дељив са 3

$4^{k+1} = 4^k \cdot 4^1 = 4 \cdot 4^k = 1 \cdot 4^k + 3 \cdot 4^k$

На пример:

$4 \cdot 4^k = 3 \cdot 4^k + 4^k$ или

$4 \cdot 4^k = 2 \cdot 4^k + 2 \cdot 4^k$

6. Доказати да је збир кубова три узастопна природна броја дељив са 9.

Решење:

n, n+1, n+2 три узастопна природна броја

Потребно је доказати да је $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ дељиво са 9.

1) За $n=1$ је
$1^3+(1+1)^3+(1+2)^3=1+8+27=36$ дељиво је са 9.

2) Претпоставимо да важи за $n=k$
$k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$ претпоставка да је дељиво са 9 (*)

3) Докажимо да је важи за $n=k+1$ тј. потребно је доказати да је

$(k+1)^3+(k+1+1)^3+(k+2+1)^3=(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$ дељиво са 9.

Имамо да је

$$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+3k^2\cdot 3+3k\cdot 3^2+3^3=$$
$$(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9k^2+27k+27=\underbrace{(k+1)^3+(k+2)^3+k^3}_{\text{Дељиво са 9 на основу претпоставке (*)}}+\underbrace{9(k^2+3k+3)}_{\text{Дељиво са 9 јер било који број помножен са 9 је и дељив са 9}}$$

На основу формуле

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Добили смо да је

$$(k+3)^3=k^3+3k^2\cdot 3+3k\cdot 3^2+3^3$$

НАЈВЕЋИ ЗАЈЕДНИЧКИ ДЕЛИЛАЦ И НАЈМАЊИ ЗАЈЕДНИЧКИ САДРЖАЛАЦ

Теорема (Основна теорема аритметике): Сваки сложен природан број може се написати као производ простих бројева:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$

- Неки од чинилаца могу бити једнаки, ако те чиниоце групишемо онда сваки природан број можемо представити у облику:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$$

  Представљање бројева на овај начин назива се **канонично**.

Пример: $14 = 2 \cdot 7$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$
$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

Дефиниција: Највећи заједнички делилац неколико бројева је највећи број којим су дељиви сви дати бројеви.

- Највећи заједнички делилац за неколико бројева *a, b, c,...* означава се са $(a,b,c,...)$ или једноставно са *NZD (a,b,c,...).*

Теорема: Највећи заједнички делилац два или више бројева једнак је производу најмањих степена заједничких простих чинилаца који се јављају у каноничним разлагањима датих бројева.

У пракси тражење највећег заједничког делиоца два или више бројева састоји се из два корака:

1. Одреди се канонично разлагење датих бројева.
2. Тражи се производ само заједничких простих чинилаца који се јављају у овим разлагањима на најмањи могући степен.

Пример: Наћи највећи заједнички делилац за бројеве 720 и 840.

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
45	3
15	3
5	5
1	

840	2
420	2
210	2
105	3
35	5
35	5
7	7
1	

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$(720, 840) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5 = 8 \cdot 15 = 120.$$

- Највећи заједнички делилац два броја може се одредити и помоћу **Еуклидовог алгоритма.**

Дефиниција: Ако је највећи заједнички делилац два броја једнак 1 онда се за те бројеве каже да су **узајамно прости.**

Пример: Методом Еуклидовог алгоритма наћи највећи заједнички делилац бројева 420 и 360.

Решење: 420:360 = 1

-360

$60 = r_1 \neq 0$

360 : 60 = 6

-360

$0 = r_2$

NZD(420, 360) = 60

Тражи се количник бројева 420 и 360, добије се остатак $60 = r_1 \neq 0$. Како је остатак различит од нуле наставља се поступак дељења делиоца 360 и добијеног остатка 60. Поступак дељења се наставља све док се у неком кораку не добије да је остатак једнак нули. Највећи заједнички делилац је последњи остатак различит од нуле.

Дефиниција: Најмањи заједнички садржалац бројева *a, b, c,...* је најмањи број који је дељив свим датим бројевима.

- Најмањи заједнички садржалац означавамо са $[a,b,c,...]$ или *NZS (a,b,c,..).*

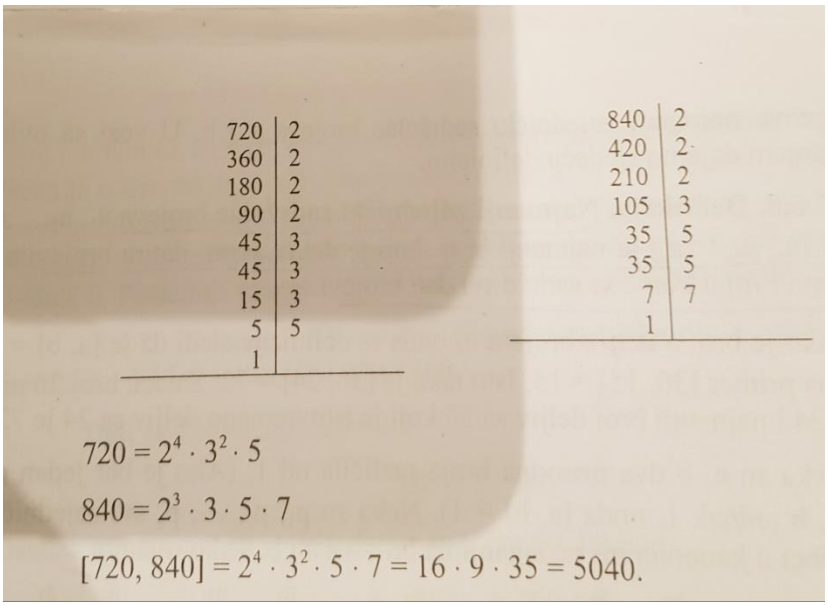
Теорема: Најмањи заједнички садржалац два или више бројева једнак је производу највећих степена свих простих чинилаца заједничких или не, који се јављају у каноничним разлагањима датих бројева.

- У пракси тражење најмањег заједничког садржаоца два или више бројева састоји се из два корака:
  1. Одреди се канонично разлагање датих бројева
  2. Тражи се производ свих простих чиниоца заједничких или не који се јављају у овим разлагањима и узимају се њихови највећи могући степени.

Теорема: Производ највећег заједничког делиоца и најмањег заједничког садржаоца два броја једнак је производу тих бројева.

$$(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b \quad \text{или} \quad NZD(a,b)\cdot NZS(a,b)=a\cdot b$$

Пример: Наћи најмањи заједнички садржалац за бројеве 720 и 840.



720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
45	3
15	3
5	5
1	

840	2
420	2
210	2
105	3
35	5
35	5
7	7
1	

$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$[720, 840] = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 16 \cdot 9 \cdot 35 = 5040.$

ЗАДАЦИ

1. Наћи:
   a) NZD(12, 20)
   b) NZD (630, 693, 231)

Решење:

a)

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

NZD(12, 20) = 4

b)

$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$693 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$

$231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$

NZD(630, 693, 231) = 21

2. Наћи:
   a) NZS(4, 12, 16, 48)
   b) NZS(240, 396, 420)

Решење:

a)

$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$

$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$

$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$

NZS(4, 12, 16, 48) = 48

b)

$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

$396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$

$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

NZS(240, 396, 420) = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 55440$

3. Три штапа дужине 48 *cm*, 60 *cm* и 90 *cm* треба исећи на комаде једнаких дужина тако да буду максималне могуће дужине. Колико таквих комада можемо добити?

Решење:

$48 = 2^4 \cdot 3$

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ NZD(48, 60, 90) = 6 Штапови треба да буду дужине 6 *cm*.

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

48:6 =8 Од првог штапа се добија 8 комада дужине 6 *cm*.
60 : 6 = 10 Од другог штапа се добије 10 комада дужине 6 *cm*.
90 : 6 =15 Од трећег штапа се добије 15 комада дужине 6 *cm*.

Укупно се добије 8+10+15 = 33 комада.

4. Од 24 руже, 60 каранфила и 72 гербера направљен је највећи могући број једнаких букета. Колико ће бити таквих букета и колико ће коштати сваки букет ако је цена руже 140 динара, каранфила 150 динара и гербера 200 динара.

Решење:

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ NZD(24, 60, 72) =12 букета.

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

24 : 12 = 2 руже
60 : 12 = 5 каранфила
72 : 12 = 6 гербера

$2 \cdot 140 + 5 \cdot 150 + 6 \cdot 200 = 2230$ динара. (У једном букету има 2 руже по 140 динара, 5 каранфила по 150 динара и 6 гербера по 200 динара).

5. Три атлетичара стартују истовремено на кружној стази. Први обиђе ту стазу за 10 минута, други за 12 минута а трећи за 15 минута. После колико минута ће се сва три атлетичара поново наћи на месту поласка?

Решење:

$10 = 2 \cdot 5$

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ NZS(10, 12, 15) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ минута.

$15 = 3 \cdot 5$

6. Одреди најмањи природни број који при дељењу са 64 и 72 даје остатак 3.

Решење: Најмањи број који при дељењу са 64 и 72 нема остатак је NZS тих бројева.

$64 = 2^6$
$72 = 2^3 \cdot 3^2$ NZS(64, 72) = $2^6 \cdot 3^2 = 576$

Број који је за 3 већи од 576 је 579, то је најмањи број који при дељењу са 64 и 72 даје остатак 3.

7. Наћи најмањи заједнички садржалац за бројеве 144 и 54 без одређивања каноничног разлагања датих бројева.

Решење:

$$NZD(a,b) \cdot NZS(a,b) = a \cdot b \quad \text{(на основу Теореме)}$$

NZD(a,b) можемо да одредимо применом Еуклидовог алгоритма (јер нам није дозвољено канонично разлагање).

144 : 54 = 2
<u>-108</u>
$36 = r_1 \neq 0$

54 : 36 =1
<u>-36</u>
$18 = r_2 \neq 0$

36 :18 = 2
<u>-36</u>
$r_3 = 0$ Последњи остатак различит од нуле је $r_2 = 18$ и то је NZD(144,54) = 18.

Сада из $NZD(a,b) \cdot NZS(a,b) = a \cdot b$ следи да је

$$NZS(a,b) = \frac{a \cdot b}{NZD(a,b)} = \frac{144 \cdot 54}{18} = 432.$$

8. Доказати да су бројеви 673 и 421 узајамно прости бројеви применом Еуклидовог алгоритма.

Решење:

Два броја су узајамно проста ако је њихов највећи заједнички делилац једнак 1.

673 :421 = 1
<u>-421</u>
252= $r_1 \neq 0$

421 : 252 = 1
<u>-252</u>
169 = $r_2 \neq 0$

252 : 169 = 1
<u>-169</u>
83= $r_3 \neq 0$

169 : 83 = 2
<u>-166</u>
3 = $r_4 \neq 0$

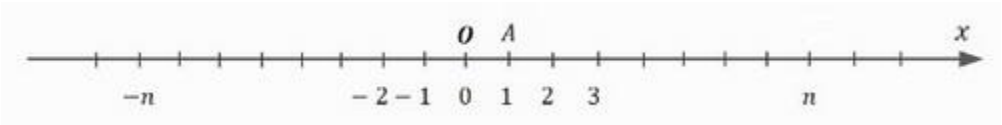
83 : 3 =27
<u>-81</u>
2 = $r_5 \neq 0$

3 : 2 =1
<u>-2</u>
1 = $r_6 \neq 0$ $\Longrightarrow$ Последњи остатак различит од нуле је 1.

2 : 1 = 2
<u>-2</u>
0 = r_7 NZD(673, 421) = 1 Бројеви 673 и 421 су узајамно прости.

ЦЕЛИ БРОЈЕВИ

- Скуп целих бројева који означавамо са **Z** је скуп свих природних бројева, нуле и свих негативниг целих бројева.
- Цели бројеви су сви „округли“ бројеви без децимала, укључујући нулу, позитивне и негативне бројеве.
- $Z = \{...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...\}$
- Целе бројеве можемо представити на бројевној правој.



- За два цела броја кажемо да су <u>супротни</u> нпр. 2 и (-2) ако су њима придружене тачке на бројевној правој на једнаком растојању од 0, али са различитих страна. Супротан број броју *a* је број *-a*. Супротан број броју *–a* је *–(-a)=a*. Збир два супротна броја једнак је 0. Број 2 зове се апсолутна вредност или модул броја 2 и броја (-2).

  <u>Дефиниција</u>: Апсолутна вредност или модул целог броја x у ознаци $|x|$ дефинише се на следећи начин:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ ако је } x > 0, \\ 0, \text{ ако је } x = 0, \\ -x, \text{ ако је } x < 0, \end{cases} \quad \text{тј. } |x| = \begin{cases} x, \text{ ако је } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ ако је } x < 0. \end{cases}$$

- Апсолутна вредност је увек позитиван број и она представља растојање неког броја од 0 на бројевној правој. Супротни бројеви имају једнаку апсолутну вредност.

Сабирање целих бројева

- Збир два цела броја истог знака има тај исти знак, док је његова апсолутна вредност једнака збиру апсолутних вредности сабирака.

  6 + 3 = 9 (оба броја позитивна и збир је позитиван)

  - 6 – 3 = - 9 (оба броја негативна и збир је негативан)

  - Збир два цела броја различитог знака и различитих апсолутних вредности има знак оног сабирка чија је апсолутна вредност већа. Апсолутна вредност збира једнака је разлици апсолутних вредности сабирака, где од сабирка са већом апсолутном вредношћу одузимамо сабирак са мањом апсолутном вредношћу.

  6– 3 = 3 (збир има знак броја веће апсолутне вредности)

  -6+3 = - 3 (збир има знак броја веће апсолутне вредности)

- Збир два супротна броја једнак је 0.

- Код сабирања целих бројева важи комутативни и асоцијативни закон:

  $a+b=b+a$ комутативни закон за сабирање

  $(a+b)+c=a+(b+c)$ асоцијативни закон за сабирање.

Множење целих бројева

- Апсолутна вредност производа два цела броја једнака је производу апсолутних вредности тих бројева.
- Ако су оба цела броја истог знака знак производа је „+“

  $6\cdot 3=18$

  $(-6)\cdot(-3)=18$

- Ако су бројеви различитог знака, онда је знак производа „ - „.

  $6\cdot(-3)=-18$

  $(-6)\cdot 3=-18$

- За множење бројевима 0,1,-1 важе правила:

$$0 \cdot a = 0$$
$$1 \cdot a = a$$
$$-1 \cdot a = -a$$

- Код множења целих бројева важе особине комутативност, асоцијативност и дистрибутивност множења у односу на сабирање.

$a \cdot b = b \cdot a$ комутативни закон за множење

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ асоцијативни закон за множење

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ дистрибутивни закон множења према сабирању

<u>Дељење целих бројева</u>

Дефиниција: Количник целих бројева a и b $(b \neq 0)$ је цео број c (ако постоји) тј. $a : b = c$ ако је $a = b \cdot c$. У овом случају каже се да је a дељиво са b или b дели a у ознаци $b \mid a$.

- Апсолутна вредност количника два броја једнака је количнику апсолутних вредности тих бројева.
- Ако су два цела броја истог знака количник има знак „+“

$$6 : 3 = 2$$
$$(-6) : (-3) = 2$$

- Ако су два цела броја различитог знака, онда је знак количника „-„.

$$6 : (-3) = -2$$
$$(-6) : 3 = -2$$

- Количник 0 и неког броја једнак је 0, $\left(\frac{0}{a} = 0\right)$.
- Дељење нулом није дозвољено.

Теорема: За било која два цела броја a и b постоји једнозначно одређени цели бројеви q и r за које важи:

$a : b = q$ и остатак r

тада је $a = b \cdot q + r$, где је q количник а r остатак $(r < b)$.

Теорема: Број a је дељив бројем b ако и амо ако се при дељењу броја a бројем b добије да је остатак $r = 0$.

Прости и сложени бројеви

Дефиниција: За број кажемо да је прост ако је дељив само са собом и јединицом.

- Прости бројеви су: 2,3,5,7,11,13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,...

Дефиниција: Број је сложен ако има више од два делиоца тј. ако није прост.

- Сложени бројеви су: 4,6,8,10,12,14,15,16,18,20,21,22,...

Дефиниција: Број један није ни прост ни сложен број.

Теорема Еуклида: Постоји бесконачно много простих бројева.

Правила дељивости бројева

Теорема: Број је дељив бројем 2 ако је паран тј. ако је последња цифра (цифра јединица) нека од цифара: 0,2,4,6,8.

- Бројеви дељиви бројем 2 су: 48, 56, 110, 234896, 359172...

Теорема: Број је дељив бројем 3 или бројем 9 ако је збир цифара тог броја дељив бројем 3 или бројем 9.

- Бројеви дељиви са 3 су: 18, 72, 54, 78, 1002, 8094, ...
  јер је нпр. 78
  ↓
  7+8=15, број 15 је дељив бројем 3, па је и број 78 дељив бројем 3.

- Бројеви дељиви бројем 9 су: 81, 1386, 8874...
  јер је нпр. 8874
  ↓
  8+8+7+4=27, број 27 је дељив са 9, па је и број 8874 дељив бројем 9.

Теорема: Број је дељив бројем 4 или бројем 20 или бројем 25 ако је број који означавају последње две цифре дељив са 4 или 20 или 25.

- Бројеви дељиви са 4 су: 20, 100, 140, 412, 704, 15412,...
- Бројеви дељиви са 20 су: 1400, 540, 16918 0,...
- Бројеви дељиви са 25 су: 45850, 308950, 1950, 18625, 4575,...

Теорема: Број је дељив са 8 или 125 ако је број који означавају последње његове три цифре дељив са 8 или 125.

- Бројеви дељиви са 8 су: 1168, 256, 2592, 260712,...
- Бројеви дељиви са 125 су: 1000, 5250, 790625,...

Теорема: Број је дељив бројем 6 ако је дељив бројем 2 и бројем 3.

- Бројеви дељиви бројем 6 су: 1104, 228, 870, 81408,...
  јер је нпр. 1104 дељив са 2 јер је цифра јединица паран број
  ↓
  1+1+0+4 = 6 збир цифара овог броја је дељив бројем 3.

Теорема: Број је дељив бројем 7 ако се занемари његова цифра јединица и од остатка одузме двострука вредност занемарене цифре.

- Бројеви дељиви бројем 7 су: 98, 231, 623, 10213, ...
  јер је нпр. код броја 231 ако се занемари цифра јединица добија се број 23.
  Од броја 23 се одузме двострука вредност занемарене цифре $23-2\cdot 1=21$ дељиво са 7.

Теорема: Број је дељив бројем 11 када је разлика између збира цифара које стоје на непарним местима и оних које стоје на парним местима дељив са 11.

- Бројеви дељиви бројем 11 су: 33, 132, 495, 803, 862983, 8684016,...
  нпр. код броја 8684016 збир цифара на непарним местима је: 8+8+0+6=22,
  збир цифара на парним местима је: 1+4+6=11. Сада је 22-11=11 дељиво са 11.

Теорема: Број је дељив бројем 12 ако је дељив бројевима 3 и 4.

Теорема: Број је дељив бројем 15 ако је дељив бројевима 3 и 5.

БРОЈНИ СИСТЕМИ

Теорема: Сваки природан број *a* може се написати у облику:

$$a = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_1 b^1 + a_0 b^0 = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_b$$

где је b основа бројног система.

- За $b = 10$ добијамо **декадни бројни систем.** У декадном бројном систему за записивање бројева користе се цифре 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
  У овом систему број *a* записујемо у облику:
  $a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1 10^1 + a_0 10^0 = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_{10}$.

- За $b = 2$ добијамо **бинарни бројни систем**. У бинарном бројном систему се користе само цифре 0 и 1. Било који бинарни број се записује комбинацијом цифара 0 и 1. У овом систему НЕ постоје цифре 2,3,4,5,6,7,8,9.
  У овом систему број *a* записујемо у облику:
  $a = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + ... + a_1 2^1 + a_0 2^0 = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_2$.

- За $b = 5$ добија се систем са основом 5. У овом систему постоје само цифре 0,1,2,3,4.
  У овом систему број *a* записујемо у облику:
  $a = a_n 5^n + a_{n-1} 5^{n-1} + ... + a_1 5^1 + a_0 5^0 = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_5$.

Пребацивање бројева из децималног бројног система у бинарни систем и систем са основом 5

$$\boxed{(\ \ )_{10} \rightarrow (\ \ )_2}$$

1. Дате декадне бројеве пребацити у бинарни бројни систем.

а) $(84)_{10} \rightarrow (\ \ )_2$

б) $(639)_{10} \rightarrow (\ \ )_2$

Решење:

а)

	остатак
$84:2=42$	0
$42:2=21$	0
$21:2=10$	1
$10:2=5$	0
$5:2=2$	1
$2:2=1$	0
$1:2=0$	1

Број 84 се дели са 2, пише се резултат 42 и са стране се пише остатак 0. Поступак дељења се наставља све док се за резултат не добије 0. Бинарни број се чита из остатка одоздо навише.

$(84)_{10} = (1010100)_2$

б)

	остатак
$639:2=319$	1
$319:2=159$	1
$159:2=79$	1
$79:2=39$	1
$39:2=19$	1
$19:2=9$	1
$9:2=4$	1
$4:2=2$	0
$2:2=1$	0
$1:2=0$	1

$(639)_{10} = (1001111111)_2$

$$\boxed{(\ \ )_{10} \rightarrow (\ \ )_5}$$

2. Дате декадне бројеве пребацити у систем са основом 5.
   а) $(734)_{10} \rightarrow (\ \ )_5$
   б) $(128)_{10} \rightarrow (\ \ )_5$

   Решење:
   а)

	остатак
$734:5=146$	4
$146:5=29$	1
$29:5=5$	4
$5:5=1$	0
$1:5=0$	1

$(734)_{10} \rightarrow (10414)_5$

   б)

	остатак
$128:5=25$	3
$25:5=5$	0
$5:5=1$	0
$1:5=0$	1

$(128)_{10} \rightarrow (1003)_5$

Пребацивање бројева из бинарног бројног система у декадни и из система са основом 5 у декадни

$$\boxed{(\ \ )_2 \rightarrow (\ \ )_{10}}$$

3. Дате бинарне бројеве пребацити у декадни бројни систем.
   а) $(101011)_2 \rightarrow (\ \ )_{10}$
   б) $(1101)_2 \rightarrow (\ \ )_{10}$

Решење:

а)

$$\left(\overset{5\,4\,3\,2\,1\,0}{101011}\right)_2 = 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^5 = 1+2+0+8+0+32 = (43)_{10}$$

Сваки број има своју позицију. Идући од десне ка левој страни одређују се позиције сваког броја, од нулте, прве, друге,...

б) $\left(\overset{3\,2\,1\,0}{1101}\right)_2 = 1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3 = 1+0+4+8 = (13)_{10}$

$$\boxed{(\ )_5 \rightarrow (\ )_{10}}$$

4. Дате бројеве из основе 5 пребацити у декадни бројни систем.

а) $(124)_5 \rightarrow (\ )_{10}$

б) $(3241)_5 \rightarrow (\ )_{10}$

Решење:

а) $\left(\overset{2\,1\,0}{124}\right)_5 = 4\cdot 5^0 + 2\cdot 5^1 + 1\cdot 5^2 = 4\cdot 1 + 2\cdot 5 + 1\cdot 25 = 4+10+25 = (39)_{10}$

$$\boxed{5^0 = 1}$$

б)

$\left(\overset{3\,2\,1\,0}{3241}\right)_5 = 1\cdot 5^0 + 4\cdot 5^1 + 2\cdot 5^2 + 3\cdot 5^3 = 1\cdot 1 + 4\cdot 5 + 2\cdot 25 + 3\cdot 125 = 1+20+50+375 =$
$(446)_{10}$

НАПОМЕНА: Ако је потребно да се број пребаци из бинарног бројног система у основу 5, онда прво пребаците број из бинарног у декадни бројни систем, а затим из декадног у основу 5. Или ако је потребно број из основе 5 пребацити у бинарни, такође прво се из основе 5 пребаци у декадни а затим из декадног у бинарни.

Сабирање и множење бројева у бинарном систему

-Сабирање

Сабирање бинарних бројева се врши по истим правилима као и сабирање бројева у декадном систему, с тим што се мора узети у обзир да се ради у бројном систему са основом 2.

Декадни систем:	0+0 = 0	0+1 = 1	1+0 = 1	1+1 = 2	1+1+1 = 3
Бинарни систем:	0+0 = 0	0+1 = 1	1+0 = 1	1+1 = 10	1+1+1 = 11

Пример. Сабрати дате бинарне бројеве.

$(101011)_2$

$(10001)_2$

101011 + 10001 = 1 0 1 0 1 1

+ 1 0 0 0 1

1 1 1 1 0 0

Сабирање вршимо са потписивањем водећи рачуна о томе да бројеве равнамо по десној ивици, односно последња цифра другог броја мора бити записана испод последње цифре првог броја

При сабирању, у случају 1 + 1 = 10, пишемо 0 и имамо 1 пренос (0 пишемо, 1 памтимо) а у случају 1 + 1 + 1 = 11, 1 пишемо и имамо 1 пренос (1 пишемо, 1 памтимо).

Напомена. За свако сабирање у бинарном систему, можемо извршити проверу сабирањем у декадном систему.

<u>За вежбу извршити проверу у декадном систему.</u>

-Множење

Множење бинарних бројева се врши по истим правилима као и множење бројева у декадном систему, с тим што се приликом сабирања међурезултата мора узети у обзир да се ради у бројном систему са основом 2.

Поступак множења бинарних бројева:

1) сваком цифром другог чиниоца помножити први чинилац

2) добијене парцијалне производе написати један испод другог, али померене за једно место у лево

3) сабрати све парцијалне производе као бинарне бројеве

Пример. Помножити бинарне бројеве $(1010100)_2$ и $(101)_2$

$$
\begin{array}{r}
1010100 \cdot 101 = 1\,0\,1\,0\,1\,0\,0 \\
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\
+\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,0 \\
\hline
1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0
\end{array}
$$

<u>За вежбу извршити проверу у декадном систему.</u>

Сабирање и множење бројева у систему са основом 5

-Сабирање

Сабирање бројева у систему са основом 5 се врши по истим правилима као и сабирање бројева у декадном систему, с тим што се мора узети у обзир да се ради у бројном систему са основом 5.

Декадни систем:	4+1 = 5	4+2 = 6	4+3 = 7	4+4 = 8 ...
Систем са основом 5:	4+1 = 10	4+2 = 11	4+3 = 12	4+4 = 13 ...

Односно, ако је збир цифара већи или једнак 5, онда збир делимо са 5, добијени количник преносимо у следећу леву позицију а остатак записујемо.

Пример. Сабрати бројеве $(2341)_5$ и $(124)_5$.

$$
\begin{array}{r}
2341 + 124 = 2\,3\,4\,1 \\
+\,1\,2\,4 \\
\hline
3\,0\,2\,0
\end{array}
$$

Као и код сабирања бинарних бројева, бројеве равнамо по десној ивици.

1 + 4 = 5, па делимо 5 : 5 = 1 (пренос) и остатак 0 (0 записујемо)

4 + 2 = 6 + 1 (пренос) = 7, 7 : 5 = 1 (пренос) и остатак 2 (2 записујемо)

3 + 1 = 4 + 1 (пренос) = 5, 5 : 5 = 1 (пренос) и остатак 0 (0 записујемо)

2 + 0 = 2 + 1 (пренос) = 3, 3 < 5 па не морамо да делимо већ записујемо 3.

<u>За вежбу извршити проверу у декадном систему.</u>

-Множење

Множење бројева у систему са основом 5 се врши по истим правилима као и множење бројева у декадном систему, с тим што се приликом сабирања међурезултата мора узети у обзир да се ради у бројном систему са основом 2.

Поступак множења бројева у систему са основом 5:

1) сваком цифром другог чиниоца помножимо први чинилац: ако при множењу цифара добијемо број који је већи или једнак 5, онда тај број делимо са 5, добијени количник преносимо у прву леву позицију за сабирање а остатак записујемо

2) добијене парцијалне производе написати један испод другог, али померене за једно место у лево

3) сабрати све парцијалне производе као бројеве у систему са основом 5

Пример. Помножити бројеве $(120)_5$ и $(23)_5$.

$$\begin{array}{r} 120 \cdot 23 = 4\,1\,0 \\ +\,2\,4\,0 \\ \hline 3\,3\,1\,0 \end{array}$$

Као и у декадном систему, прво 120 множимо са 3

$3 \cdot 0 = 0$

$3 \cdot 2 = 6$ а $6 > 5$ па вршимо дељење, $6 : 5 = 1$ и остатак 1

Остатак 1 записујемо а количник 1 преносимо у леву позицију за следеће сабирање;

Даље, $3 \cdot 1 = 3$ и додајемо 1 пренос $(3 + 1 = 4)$

Дакле, $3 \cdot 120 = 410$.

<u>За вежбу извршити проверу у декадном систему.</u>

Задатак1. Дати су бројеви $x = (101101)_2$, $y = (402)_5$ и $z = (345)_{10}$. Одредити:

а) $(x + y + z)_2$;

б) $(x \cdot y)_5$.

Представимо прво x у системима са основама 10 и 5.

$x = (101101)_2 \longrightarrow (\,)_{10}$

$101101 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = 1 + 4 + 8 + 32 = 45$

$x = (101101)_2 = (45)_{10}$

Пребацимо сада x и у систем са основом 5.

	остатак
45 : 5 = 9	0
9 : 5 = 1	4
1 : 5 = 0	1

$x = (101101)_2 = (45)_{10} = (140)_5$

Представимо сада y у системима са основама 10 и 2.

$y = (402)_5 \longrightarrow (\,)_{10}$

$402 = 2 \cdot 5^0 + 0 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^2 = 2 + 4 \cdot 25 = 102$

$y = (402)_5 = (102\,)_{10}$

Пребацимо сада y и у систем са основом 2.

	остатак
102 : 2 = 51	0
51 : 2 = 25	1
25 : 2 = 12	1
12 : 2 = 6	0
6 : 2 = 3	0
3 : 2 = 1	1
1 : 2 = 0	1

$y = (402)_5 = (102)_{10} = (1100110)_2$

Представимо сада z у системима са основама 2 и 5.

$z = (345)_{10} \longrightarrow (\,)_2$

	Остатак
345 : 2 = 172	1
172 : 2 = 86	0
86 : 2 = 43	0
43 : 2 = 21	1
21 : 2 = 10	1
10 : 2 = 5	0
5 : 2 = 2	1
2 : 2 = 1	0
1 : 2 = 0	1

$z = (345)_{10} \longrightarrow (\,)_5$

	Остатак
345 : 5 = 69	0
69 : 5 = 13	4
13 : 5 = 2	3
2 : 5 = 0	2

$z = (345)_{10} = (101011001)_2 = (2340)_5$

а) $(x + y + z)_2 = (101101 + 1100110 + 101011001)_2$

Ради лакшег рачунања, сабраћемо прво $(x + y)_2$

$$
\begin{array}{r}
(x+y)_2 = \ 1\,0\,1\,1\,0\,1 \\
+\ 1\,1\,0\,0\,1\,1\,0 \\
\hline
1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1
\end{array}
$$

Додајмо сада и z

$$
\begin{array}{r}
(x+y+z)_2 = \ 1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1 \\
+\ 1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1 \\
\hline
1\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,0
\end{array}
$$

$(x + y + z)_2 = (1\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,0)_2$

Извршимо проверу рачунајући у декадном систему

$(1\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,0)_2 = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^8 =$

$= 4 + 8 + 32 + 64 + 128 + 246 = (492)_{10}$

$(x + y + z)_{10} = (45 + 102 + 345)_{10} = (492)_{10}$

б) $(x \cdot y)_5$ = 140 · 2340 = 0 0 0

$$\begin{array}{r} 1\,2\,1\,0 \\ 1\,0\,2\,0 \\ +\,3\,3\,0 \\ \hline 4\,4\,4\,1\,0\,0 \end{array}$$

140 · 4 =

	остатак
4 · 0 = 0 : 5 = 0	0
4 · 4 = 16 : 5 = 3	1
3 + 4 · 1 = 7 : 5 = 1	2
1 + 4 · 0 = 1 : 5 = 0	1

140 · 3 =

	остатак
3 · 0 = 0 : 5 = 0	0
3 · 4 = 12 : 5 = 2	2
2 + 3 · 1 = 5 : 5 = 1	0
1 + 3 · 0 = 1 : 5 = 0	1

140 · 2 =

	остатак
2 · 0 = 0 : 5 = 0	0
2 · 4 = 8 : 5 = 1	3
1 + 2 · 1 = 3 : 5 = 0	3

$(x \cdot y)_5 = (444100)_5$

Провера у декадном систему $(x \cdot y)_{10} = (45 \cdot 345)_{10} = (15525)_{10}$

$(444100)_5 = 0 \cdot 5^0 + 0 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^4 + 4 \cdot 5^5 = 25 + 500 + 2500 + 12500 = (15525)_{10}$

ЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ

Линеарна једначина са једном непознатом

1° Једначина

(1) $ax = b, a, \quad b \in R$

је општи облик линеарне једначине са једном непознатом, где је x непозната.
2° Број r је решење једначине (1) ако је $ar = b$.

3° Ако је $a \neq 0$ једначина (1) има јединствено решење $x = \frac{b}{a}$. Заиста $a\frac{b}{a} = b$.

4° Ако је $a = 0$ и $b \neq 0$, једначина (1) је **немогућа** и нема решења.
5° Ако је $a = 0$ и $b = 0$, једначина (1) је **неодређена** и има бесконачно много решења.
6° Једначине $P(x) = 0$ и $Q(x) = 0$ су еквивалентне ако је тачна формула

$P(x) = 0 \Leftrightarrow Q(x) = 0.$

Како решавати једначину?
- Прво се ослободимо разломака (ако их има) тако што целу једначину помножимо са НЗС
- Онда се ослободимо заграда (ако их има) множећи "сваки са сваким''.
- Непознате пребацимо на једну а познате на другу страну знака =.
(<u>Напомена: приликом преласка са једне на другу страну мења се знак</u>)
- "средимо'' обе стране (одузмемо и саберемо) и добијемо $a \cdot x = b$
- Изразимо непознату $x = \frac{b}{a}$

Линеарне неједначине са једном непознатом и њихово решавање

Општи облик линеарне неједначине са једном непознатом се може јавити у једном од облика:
(1) $ax > b$, (2) $ax \geq b$, (3) $ax < b$, (4) $ax \leq b$.
где су a, b реални бројеви, а x непозната.

За решавање неједначине (1) важи следеће:
1° За $a > 0$ има за решење сваки реалан број $x > \frac{b}{a}$;
2° За $a < 0$ има за решење сваки реалан број $x < \frac{b}{a}$;
3° За $a = 0$, $b < 0$, решења су сви реални бројеви;
4° За $a = 0$, $b > 0$, нема решења.

Систем линеарних једначина

1. Конјункција једначина $a_1x + b_1y = c_1 \ \wedge \ a_2x + b_2y = c_2$ по непознатим x и y, где су a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 задати реални бројеви, при чему је бар један од бројева a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 различит од нуле, назива се систем од две једначине са две непознате.

2. Уређен пар реалних бројева (α, β) назива се решење система ако је $a_1\alpha + b_1\beta = c_1 \ \wedge \ a_2\alpha + b_2\beta = c_2$.

Задаци:

1. Решити једначине:
а) 3(x + 2) – 2(1 – x) = 4x + 5
б) 3x – (15 + 2x – (5x + 11)) = 2x – 8

Решење:

а) 3(x + 2) – 2(1 – x) = 4x + 5 прво ћемо се ослободити заграда
3x + 6 – 2 + 2x = 4x + 5 затим непознате пребацујемо на једну, познате на другу страну
3x + 2x – 4x = 5 – 6 + 2
x = 1

б) 3x – (15 + 2x – (5x + 11)) = 2x – 8 ослобађамо се заграда али водећи рачуна о томе да крећемо од најмање заграде, а на крају се ослобађамо највеће
3x – (15 +2x – 5x – 11) = 2x – 8
3x – (– 3x + 4) = 2x – 8
3x + 3x – 4 = 2x – 8
6x – 4 = 2x – 8
6x – 2x = –8 + 4
4x = – 4
$x = \frac{-4}{4}$
x = –1

2. Решити једначине:
а) 5(x – 1) – 4(x – 3) = – 20
б) 10x – 2(25 – 3x) – 3 = 8(2x – 6) – 5
в) 3x + 5(x + 2)(x – 2) = 5(x – 1)(x + 1) + 6

Решење:

а) 5(x – 1) – 4(x – 3) = – 20 ослобађамо се заграде и водимо рачуна о томе да када је испред заграде минус, унутар заграде мењамо знак
5x – 5 – 4x + 12 = – 20
x + 7 = – 20
x = – 20 – 7 па је x = – 27

б) $10x - 2(25 - 3x) - 3 = 8(2x - 6) - 5$

$10x - 50 + 6x - 3 = 16x - 48 - 5$

$16x - 53 = 16x - 53$

$16x - 16x = -53 + 53$

$0x = 0$ на основу правила 5° ова једначина је неодређена и има бесконачно много решења

в) $3x + 5(x + 2)(x - 2) = 5(x - 1)(x + 1) + 6$ у овом примеру заграде смо „средили“ помоћу формуле за разлику квадрата $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$; заграде смо могли да средимо и тако што помножимо сваки са сваким, али пазимо да испред заграде имамо 5, па све множимо и са 5

$3x + 5(x^2 - 2^2) = 5(x^2 - 1^2) + 6$

$3x + 5x^2 - 20 = 5x^2 - 5 + 6$

$5x^2 + 3x - 5x^2 = 1 + 20$

$3x = 21$

$x = \frac{21}{3}$

$x = 7$

3. Решити једначине:

а) $(x - 1)(x - 2) + (x - 2)(x - 3) - 2(x + 1)(x - 8) = 0$

б) $(x + 8)^2 + (x + 3)^2 = (x + 12)^2 + (x - 5)^2$

Решење:

а) $(x - 1)(x - 2) + (x - 2)(x - 3) - 2(x + 1)(x - 8) = 0$ заграде се ослобађамо тако што множимо сваки са сваким и водимо рачуна о томе да када је испред заграде минус, унутар заграде мењамо знак

$x^2 - 2x - x + 2 + x^2 - 3x - 2x + 6 - 2(x^2 - 8x + x - 8) = 0$

$2x^2 - 8x + 8 - 2x^2 + 14x + 16 = 0$

$6x + 24 = 0$

$6x = -24$

$x = \frac{-24}{6}$

$x = 4$

б) $(x + 8)^2 + (x + 3)^2 = (x + 12)^2 + (x - 5)^2$ у овом примеру примењујемо формуле за квадрат бинома: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$x^2 + 16x + 64 + x^2 + 6x + 9 = x^2 + 24x + 144 + x^2 - 10x + 25$

$2x^2 + 22x + 73 = 2x^2 + 14x + 169$

$2x^2 - 2x^2 + 22x - 14x = 169 - 73$

$8x = 96$

$x = \frac{96}{8}$

$x = 12$

4. Решити једначине:

а) $\frac{5x}{2} = \frac{3x+24}{6}$
б) $\frac{x+2}{5} - 3 = \frac{x-1}{2} - x$
в) $2 + \frac{y+17}{5} - \frac{3y-7}{4} = 0$
г) $\frac{5-x}{6} = 1 - \frac{7x+2}{12}$
д) $\frac{2x-1}{3} - \frac{4-x}{2} = x + 1 + \frac{x-3}{6}$

Решење:

У овим примерима ћемо се прво ослободити разломака, множећи једнакост НЗС-ом, затим средити израз и одредити x.

а) $\frac{5x}{2} = \frac{3x+24}{6}$ / *6 НЗС(2,6) = 6, па једнакост множимо са 6 и вршимо могућа скарићавања

$6\frac{5x}{2} = 6\frac{3x+24}{6}$
$15x = 3x + 24$
$15x - 3x = 24$
$12x = 24$
$x = \frac{24}{12}$
$x = 2$

б) $\frac{x+2}{5} - 3 = \frac{x-1}{2} - x$ /*10 НЗС(5,2) = 10, па једнакост множимо са 10 и вршимо могућа скарићавања

$10\frac{x+2}{5} - 3\cdot 10 = 10\frac{x-1}{2} - 10\cdot x$
$2(x + 2) - 30 = 5(x - 1) - 10x$
$2x + 4 - 30 = 5x - 5 - 10x$
$2x - 26 = -5x - 5$
$2x + 5x = -5 + 26$
$7x = 21$
$x = \frac{21}{7}$
$x = 3$

в) $2 + \frac{y+17}{5} - \frac{3y-7}{4} = 0$ /*20 НЗС(5,4) = 20, па једнакост множимо са 20 и вршимо могућа скарићавања

$2\cdot 20 + 20\frac{y+17}{5} - 20\frac{3y-7}{4} = 20\cdot 0$
$40 + 4(y + 17) - 5(3y - 7) = 0$
$40 + 4y + 68 - 15y + 35 = 0$
$-11y + 143 = 0$
$-11y = -143$

$y = \frac{-143}{-11}$
$y = 13$

г) $\frac{5-x}{6} = 1 - \frac{7x+2}{12}$ /*12 НЗС(6,12) = 12, па једнакост множимо са 12 и вршимо могућа скарићавања

$12\frac{5-x}{6} = 12 \cdot 1 - 12\frac{7x+2}{12}$

$2(5 - x) = 12 - (7x + 2)$ 7x+2 стављамо у загради јер је испред разломка био минус

$10 - 2x = 12 - 7x - 2$

$-2x + 7x = 10 - 10$

$5x = 0$

$x = 0$

д) $\frac{2x-1}{3} - \frac{4-x}{2} = x + 1 + \frac{x-3}{6}$ /*6 НЗС(2,3,6) = 6, па једнакост множимо са 6 и вршимо могућа скарићавања

$6\frac{2x-1}{3} - 6\frac{4-x}{2} = 6x + 6 \cdot 1 + 6\frac{x-3}{6}$

$2(2x - 1) - 3(4 - x) = 6x + 6 + x - 3$

$4x - 2 - 12 + 3x = 7x + 3$

$7x - 14 = 7x + 3$

$7x - 7x = 3 + 14$

$0x = 17$

Ова једначина нема решења на основу правила 4°.

5. Мајка има 27 година, а ћерка 3 године. Кроз колико година ће мајка бити четири пута старија од ћерке?

Решење: Означимо са x број година који треба да прође да би мајка била четири пута старија од ћерке, тада реченицу: „Мајка ће за x година година бити четири пута старија од своје ћерке“ записујемо:

$27 + x = 4(3 + x)$

Решимо сада једначину

$27 + x = 12 + 4x$

$x - 4x = 12 - 27$

$-3x = -15$

$x = \frac{-15}{-3}$

$x = 5$

Дакле, кроз 5 година, мајка ће бити четири пута старија од ћерке.

Да проверимо:

Кроз 5 година мајка ће имати 27 + 5 = 32 године, а ћерка 3 + 5 = 8.

Дакле, видимо да ће кроз 5 година мајка бити четири пута старија од ћерке.

6. У једном разреду $\frac{3}{7}$ ученика чине девојчице. Ако би дошле још 4 девојчице, тада би у разреду био једнак број девојчица и дечака. Одредити колико је ученика било у разреду.

Решење: Означимо са x број ученика у датом разреду. Тада број девојчица у разреду записујемо као $\frac{3}{7}x$. Реченицу: „Ако у разред дођу још 4 девојчице, у разреду ће бити једнак број дечака и девојчица(значи пола одељења биће девојчице, а пола дечаци)“ записаћемо као:

$\frac{3}{7}x + 4 = \frac{x+4}{2}$ где је x + 4 број ученика након што дођу још 4 девојчице, а $\frac{x+4}{2}$ представља половину тог броја ученика, односно број девојчица, као и број дечака.

Решимо сада једначину.

$\frac{3}{7}x + 4 = \frac{x+4}{2}$ /*14

$2\cdot 3x + 14\cdot 4 = 7\cdot(x + 4)$

$6x + 56 = 7x + 28$

$6x – 7x = 28 – 56$

$– x = – 28$ /*(-1)

$x = 28$

7. Странице правоугаоника се разликују за 3 cm. Ако се свака страница повећа за 2 cm, обим правоугаоника ће износити 62 cm. Израчунати странице правоугаоника.

Решење: Обим правоугаоника рачунамо по формули O = 2a + 2b, где је a = b + 3 (јер се странице разликују за 3 cm)

Обим новог правоугаоника(када се свака страница повећа за 2 cm) је $O_1 = 2a_1 + 2b_1$ и он износи 62 cm, где је

$a_1 = a + 2$

$b_1 = b + 2$

$O_1 = 2a_1 + 2b_1$

$O_1 = 62$ cm

Односно, $2a_1 + 2b_1 = 62$ cm , запишимо сада a_1 и b_1 преко a и b

$2(a + 2) + 2(b + 2) = 62$ cm , заменимо сада a = b + 3

$2(b + 3 + 2) + 2(b + 2) = 62$ cm

$2(b + 5) + 2(b + 2) = 62$ cm сада решимо једначину и одредимо колико износи страница b

$2b + 10 + 2b + 4 = 62$ cm

$4b + 14 = 62$ cm

$4b = (62 – 14)$ cm

$4b = 48$ cm

$b = \frac{48}{4}$ cm

$b = 12$ cm

Одредимо сада страницу a

$a = b + 3$

$a = (12 + 3)$ cm

$a = 15$ cm

8. Решити неједначине:
а) $5x - 2 < 2x + 1$
б) $-4x \geq -2x + 3$

Напомена. При записивању скупа решења неједначина пазимо на следеће:
Код $+\infty$ и $-\infty$ увек иду мале заграде ( )
Код знакова < и > мале заграде
Код $\leq$ и $\geq$ иду средње заграде [ ]
Мале заграде (,) нам говоре да ти бројеви нису у скупу решења, док [,] говоре да су и ти бројеви у решењу.

Решење:

а) $5x - 2 < 2x + 1$ као и код једначина, непознате пребацујемо на једну, познате на другу страну
$5x - 2x < 1 + 2$
$3x < 3$
$x < \frac{3}{3}$
$x < 1$
Скуп решења неједначине записујемо: $x \in (-\infty,1)$

б) $-4x \geq -2x + 3$
$-4x + 2x \geq 3$
$-2x \geq 3 /:(-2)$ да бисмо одредили x, неједначину делимо са – 2, па како делимо негативном вредношћу, мења се знак неједнакости
Дакле, добијамо $x \leq -\frac{3}{2}$
Скуп решења неједначине записујемо: $x \in (-\infty,-\frac{3}{2}]$

9. Решити неједначине:
а) $3(x - 2) + 9x < 2(x + 3) + 8$
б) $5(4 - 3x) < 2(2x - \frac{1}{2})$
в) $2x(2x - 5) - (2x + 1)^2 < -1$

Решење:

а) $3(x - 2) + 9x < 2(x + 3) + 8$ ослобађамо се заграда
$3x - 6 + 9x < 2x + 6 + 8$ непознате пребацујемо на једну, познате на другу страну неједнакости
$3x + 9x - 2x < 6 + 8 + 6$
$10x < 20$
$x < \frac{20}{10}$
$x < 2$
Скуп решења неједначине записујемо: $x \in (-\infty, 2)$

б) $5(4 - 3x) < 2(2x - \frac{1}{2})$ ослобађамо се заграда

$20 - 15x < 4x - 1$ непознате пребацујемо на једну, познате на другу страну неједнакости

$-15x - 4x < -1 - 20$

$-19x < -21 /: (-19)$ неједнакост делимо негативном вредношћу, па се знак мења

$x > \frac{-21}{-19}$ односно $x > \frac{21}{19}$

Скуп решења неједначине записујемо: $x \in (\frac{21}{19}, +\infty)$

в) $2x(2x - 5) - (2x + 1)^2 < -1$ ослобађамо се заграде и квадрирамо бином

$4x^2 - 10x - (4x^2 + 4x + 1) < -1$ ослобађамо се заграде и пазимо да је испред заграде минус па се у загради мења знак, затим непознате пребацујемо на једну, познате на другу страну неједнакости

$4x^2 - 10x - 4x^2 - 4x - 1 < -1$

$-14x < -1 + 1$

$-14x < 0$ делимо неједнакост са -14, па се знак мења

$x > 0$

Скуп решења неједначине записујемо: $x \in (0, +\infty)$

10. Решити неједначину:

$\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-2}{2} \geq -1$ као и код једначина, прво ћемо се ослободити разломака, множимо неједначину НЗС(2,3) = 6 и вршимо могућа скраћивања

$2(2x + 1) - 3(3x - 2) \geq -6$

$4x + 2 - 9x + 6 \geq -6$

$4x - 9x \geq -6 - 2 - 6$

$-5x \geq -14 /: (-5)$

$x \leq \frac{-14}{-5}$ односно $x \leq \frac{14}{5}$

Скуп решења неједначине записујемо: $x \in (-\infty, \frac{14}{5}]$

11. Решити неједначину:

$5 - \frac{x-1}{4} \geq 2 + \frac{5x+5}{8}$ прво ћемо се ослободити разломака, множимо неједначину НЗС(4,8) = 8 и вршимо могућа скраћивања

$40 - 2(x - 1) \geq 16 + 5x + 5$ ослобађамо се заграде пазећи на знак

$40 - 2x + 2 \geq 21 + 5x$ непознате пребацујемо на једну, познате на другу страну неједнакости

$-2x - 5x \geq 21 - 42$

$-7x \geq -21$ неједнакост делимо негативном вредношћу, па се знак мења

$x \leq \frac{-21}{-7}$ односно $x \leq \frac{21}{7}$

Скуп решења неједначине записујемо: $x \in (-\infty, 3]$

СИСТЕМ ДВЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА ДВЕ НЕПОЗНАТЕ

Решити систем две линеарне једначина са две непознате значи наћи пар бројева који задовољавају обе једначине.
Елементарне методе за решавање ових система су:
-метода замене
-метода супротних коефицијената.
Поред ових, системе можемо решити помоћу других метода: Гаусовом, помоћу детерминанти, матрицама, графички итд.

Напоменимо само да дати систем може имати: јединствено решење, бесконачно много решења (неодређен) или да нема решења (немогућ).

Гаусов метод подразумева постепену елиминацију непознатих из датог система.

12. Решити систем једначина методом замене.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$ из прве једначине ћемо изразити y

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ x - 3(5 - 2x) = 6 \end{cases}$$ и заменити у другој једначини система

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ x - 15 + 6x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ 7x = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ x = 3 \end{cases}$$ сада када смо добили x заменићемо у једначини $y = 5 - 2x$ да би добили y

$$\begin{cases} y = 5 - 2 \cdot 3 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$ $(x,y) = (3, -1)$

13. Решити систем једначина методом супротних коефицијената

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$ прву једначину помножимо са 3 како би уз y добили супротне коефицијенте

$$\begin{cases} 6x + 3y = 15 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$ сада сабирамо 1. и 2. једначину како би елиминисали y

$$\begin{cases} 7x = 21 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$ оно што смо добили записујемо уместо прве једначине а другу преписујемо

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$ кад одредимо x, мењамо у другој једначини како би израчунали y

$(x,y) = (3, -1)$

14. Збир година мајке и ћерке је 46. После 10 година мајка ће бити 2 пута старија од ћерке. Колико година сада има мајка а колико ћерка?

Обележимо са:
x – године мајке
y – године ћерке

После 10 година
мајка → x + 10 година
ћерка → y + 10 година

$x + y = 46$ формирамо систем на основу података из текста задатка
$x + 10 = 2 \cdot (y + 10)$

$x + y = 46$
$x + 10 = 2y + 20$ непознате пребацујемо на једну, познате на другу страну једнакости

$x + y = 46$
$x - 2y = 10 \ /(-1)$ 2. једначину множимо са -1

$x + y = 46$
$-x + 2y = -10$ и додајемо је првој

$3y = 36$ елиминисали смо x, па можемо да одредимо y
$y = 12$
$x + 12 = 46$ x ћемо одредити тако што y мењамо у првој једначини
$x = 34$

Дакле, мајка сада има 34 године а ћерка 12 година.

15. Један угао троугла је 95°. Одредити преостала два угла тог троугла ако се зна да је један од њих за 15° мањи од другог.

Ако је један угао троугла 95°, онда збир преостала два угла добијамо кад од 180° одузмемо 95°. Дакле
$\alpha + \beta = 180^o - 95^o$
$\alpha + \beta = 85^o$

Добили смо једну једначину, а како каже у задатку да је један угао за 15 степени мањи од другог, то је
$\alpha - \beta = 15^o$

Оформимо систем:

$\alpha + \beta = 85^o$ сабраћемо једначине како би елиминисали β и одредили α
$\alpha - \beta = 15^o$

$2\alpha = 100^o \rightarrow \alpha = \frac{100^o}{2} \rightarrow \alpha = 50^o$ сада оно што смо добили мењамо у првој једначини
$\alpha + \beta = 85^o$
$50^o + \beta = 85^o$
$\beta = 85^o - 50^o$
$\beta = 35^o$

Тражени углови имају 50 и 35 степени.

16. Гаусовим методом решити систем једначина:

$x - y + 3z = 20$
$-3x + 4y + 2z = -7$
$-x + 2y + z = -2$

Решење: Прво ћемо проучити коефицијенте уз x: имамо 1, -3 и -1. Да би коефицијент у првој једначини (1) био супротан коефицијенту у другој (-3), треба да га помножимо са 3. За трећу једначину не морамо ништа да радимо, јер су коефицијенти већ супротни.

Дакле, да би неутралисали x из друге и треће једначине, прво ћемо прву помножити са 3 и додати другој, а затим прву без множења додати трећој:

$$\begin{array}{l} x - y + 3z = 20 \\ -3x + 4y + 2z = -7 \\ -x + 2y + z = -2 \\ \hline x - y + 3z = 20 \\ \quad y + 11z = 53 \\ \quad y + 4z = 18 \end{array}$$

Добили смо једну једначину са три непознате и две једначине са по две непознате. Сада понављамо поступак за другу и трећу једначину, да би елиминисали y из треће:

$$\begin{array}{l} x - y + 3z = 20 \\ \quad y + 11z = 53 \\ \quad y + 4z = 18 \\ \hline x - y + 3z = 20 \\ \quad y + 11z = 53 \\ \qquad -7z = -35 \end{array}$$

другу једначину множимо са -1 и додајемо је трећој

прву и другу једначину преписујемо а уместо треће пишемо оно што смо добили када смо 2. помножили са -1 и додали је 3. једначини

Одавде, радом „уназад“ рачунамо z, заменом добијамо y и на крају x:

$-7z = -35 \Longrightarrow z = 5$ прво z мењамо у 2. једначини да добијемо y
$y + 11 \cdot 5 = 53 \Longrightarrow y = 53 - 55 = -2$ сада y и z мењамо у 1. једначини до добијемо x
$x - (-2) + 3 \cdot 5 = 20 \Longrightarrow x = 20 - 2 - 15 = 3$

Дакле, решење је $(x, y, z) = (3, -2, 5)$.

17. Гаусовим методом решити систем једначина:

$$\begin{array}{l} x - 3y + 4z = 14 \\ -x + 2y - 5z = -13 \\ 2x + 5y - 3z = -5 \\ \hline x - 3y + 4z = 14 \\ \quad -y - z = 1 \\ 11y - 11z = -33 \\ \hline \end{array}$$

прву без множења сабирамо са другом, јер су уз x супротни коеф. а прву помножену са -2 додајемо 3. да бисмо добили супротне коефицијенте

$x - 3y + 4z = 14$

$-y - z = 1$ сада 2. једначину множимо са 11 и додајемо је трећој да ми елиминисали y

$-22z = -22$ одавде одредимо z а даље заменама у 2. и 1. једначини одређујемо x и y

$z = 1$

$-y - 1 = 1 \Longrightarrow y = -2$

$x - 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 14 \Longrightarrow x + 6 + 4 = 14 \Longrightarrow x = 4$

Дакле, решење је $(x, y, z) = (4, -2, 1)$.

18. Гаусовим методом решити систем једначина:

$x + y + z = 5$ прву једначину множимо са -5 и додајемо другој

$5x + 5y + 5z = 20$

$2x + 3y - z = 8$

$x + y + z = 5$

$0 = -5$

Пошто смо добили нетачну једнакост $(0 = -5)$, овај систем нема решења.

ГЕОМЕТРИЈА

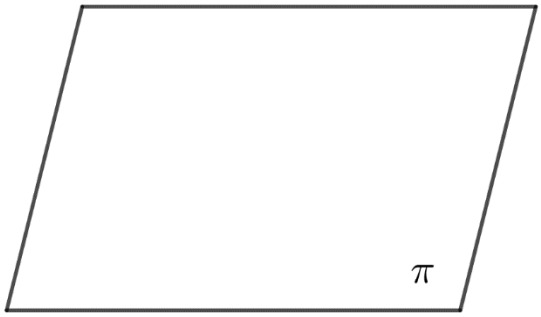
Геометрија је грана математике која се бави проучавањем особина и међусобних односа просторних облика тј. геометријских тела, облика, линија и тачака.

-Основни геометријски појмови су: **тачка**, **права** и **раван**.

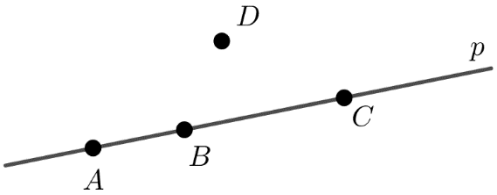
-Тачке су елементи тродимензионалног простора и означавамо их великим словима латинице $A, B, C, \ldots$

-Праве су подскупови тродимензионалног простора и означавамо их малим словима латинице $a, b, c, p, q, r \ldots$

-Равни су подскупови тродимензионалног простора и означавамо их грчким словима $\alpha, \beta, \gamma, \delta,\ \pi \ldots$

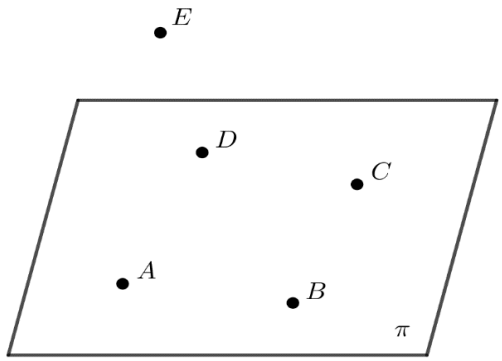


Дефиниција. За тачке које припадају једној правој кажемо да су колинеарне. У супротном су неколинеарне.



На слици изнад колинеарне су тачке A, B и C јер се налазе на једној правој p, а неколинеарне су нпр. тачке A, B и D јер не припадају једној правој.

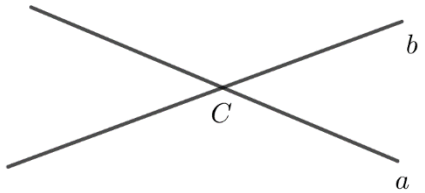
Дефиниција. За тачке које припадају једној равни кажемо да су компланарне. У супротном су некомпланарне.



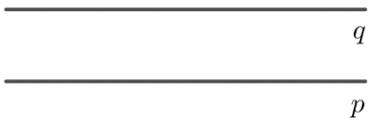
На слици изнад компланарне су тачке $A, B,\ C$ и D јер припадају равни π, а некомпланарне су нпр. тачке A, B, C и E јер тачке A, B и C припадају равни π а тачка E јој не припада.

Међусобни однос две праве

Ако праве a и b припадају истој равни и имају заједничку тачку C, кажемо да се праве $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ **секу у тачки** $\boldsymbol{C}$.
Ако праве p и q припадају истој равни и немају заједничких тачака, кажемо да су те две праве **паралелне**. То обележавамо на следећи начин $\boldsymbol{p \parallel q}$.

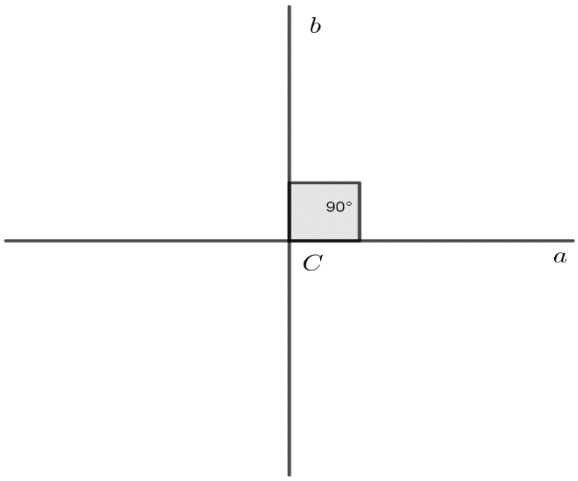


праве a и b се секу у тачки C



$\boldsymbol{p \| q}$

Ако се праве a и b секу тако да образују четири права угла, тада кажемо да су праве a и b **нормалне**. То обележавамо на следећи начин $a \perp b$.

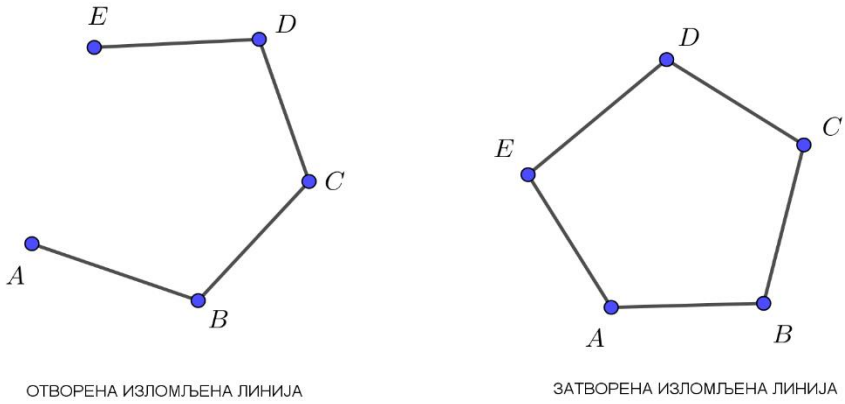


$\boldsymbol{a \perp b}$

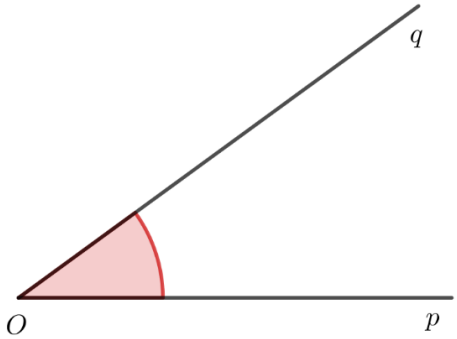
Дефиниција. Нека је дата права p и тачка A која припада правој p. Скуп који се састоји од тачке A и скупа тачака праве p са једне стране тачке A назива се полуправом. Означава се са Ap.

Дефиниција. Скуп који садржи две различите тачке A и B и све тачке између њих, зове се дуж AB. Тачке A и B се називају крање тачке дужи, а тачке између њих унутрашње тачке дужи.

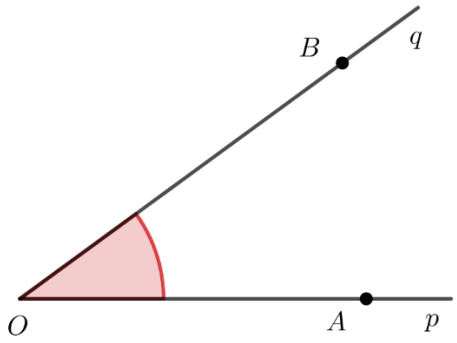
Ако је почетак једне дужи крај претходне, кажемо да су дужи надовезане једна на другу.
Изломљена линија је линија која се добија надовезивањем дужи. Изломљене линије могу бити отворене и затворене.
Отворене изломљене линије су оне линије код којих су почетак и крај две различите тачке.
Затворене изломљене линије су оне линије код којих се почетак и крај поклапају.



Дефиниција. Унија две полуправе Op и Oq са заједничком тачком O назива се угаона линија. Унија угаоне линије и једне од угаоних области (одређених угаоном линијом) назива се угао. Означава се са $\measuredangle pOq$. Краци угла су полуправе Op и Oq, теме угла је тачка O.



Угао можемо означити и као $\measuredangle AOB$ при чему тачка A припада полуправој Op, тачка B припада полуправој Oq, а тачка O је теме угла.



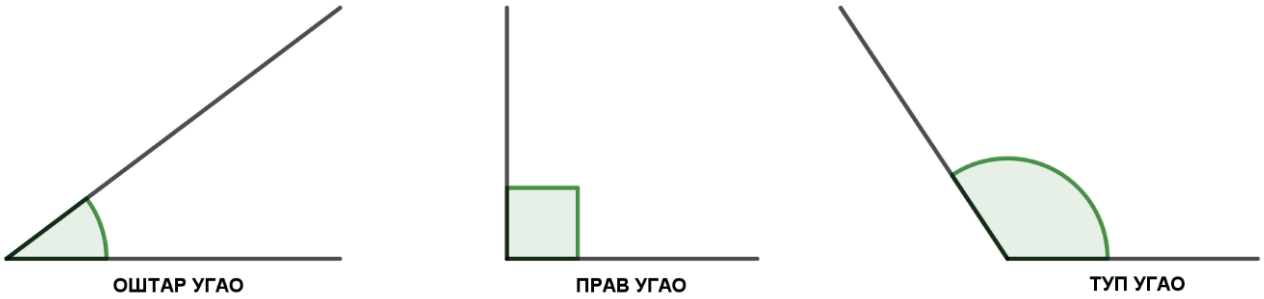
Врсте углова

Углове делимо на: оштре, праве и тупе углове.

Прав угао је угао који има 90°.

Оштар угао је угао мањи од правог угла.

Туп угао је угао већи од правог угла.



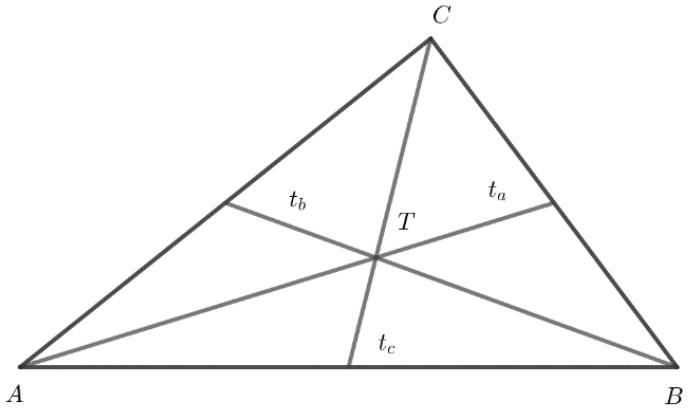
Дефиниција. Непразан скуп тачака називамо геометријска фигура, или само фигура.

Навешћемо неке значајне геометријске фигуре у равни

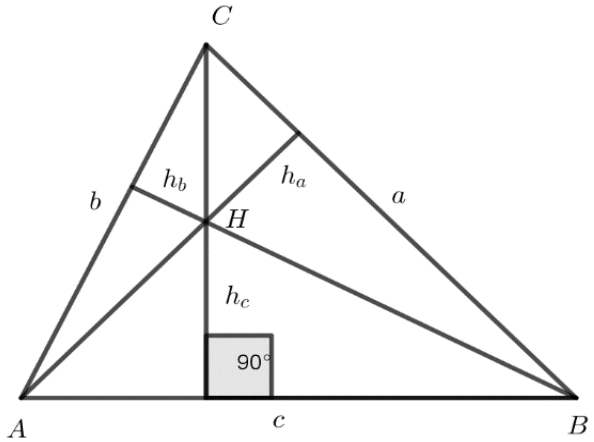
Троугао

Дефиниција. Многоугао који има три темена, три угла и три странице називамо **троугао**. Ознака за троугао је ΔABC, где су A, B и C темена троугла.
Основни елементи троугла су странице и углови.
Навешћемо неке значајне тачке троугла.

Дефиниција. Тежишна линија (медијана) троугла, у ознаци t_a је дуж одређена теменом A и средином наспрамне странице.
Тежишне линије троугла (t_a, t_b, t_c) секу се у једној тачки, тачки T коју називамо **тежиште троугла**, и подељене су том тачком у односу 2:1 (посматрајући од темена).

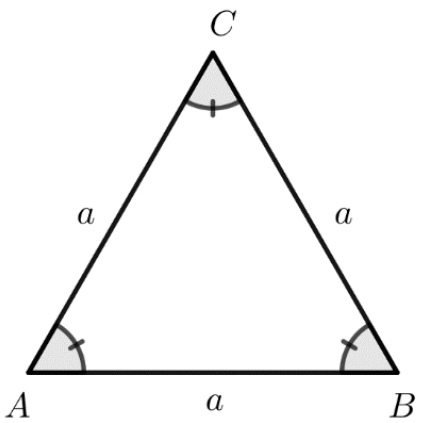


Дефиниција. Висина троугла је дуж одређена теменом троугла и подножјем нормале спуштене из тог темена на наспрамну страницу троугла.
Висине троугла секу се у једној тачки, H коју називамо **ортоцентар троугла**.



Троуглове у односу на једнакост страница и углова делимо на:

1) Једнакостраничне (све странице су једнаке и сви унутрашњи углови су једнаки)



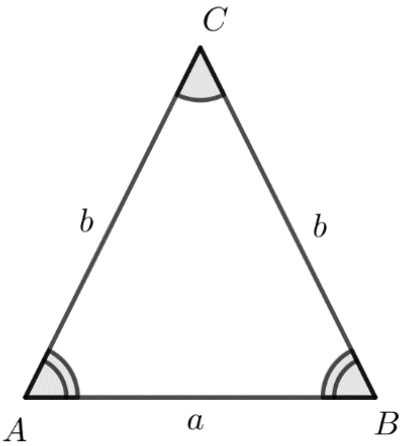
ЈЕДНАКОСТРАНИЧНИ ТРОУГАО

- Површина једнакостраничног троугла $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

- Обим једнакостраничног троугла $O = 3a$

- Унутрашњи углови једнакостраничног троугла су једнаки и износе $60°$
- Темена троугла: A, B и C
- Странице троугла AB, BC и AC
- Углови: $\measuredangle BAC, \measuredangle ABC$ и $\measuredangle BCA$

2) Једнакокраке (једнаке две странице)

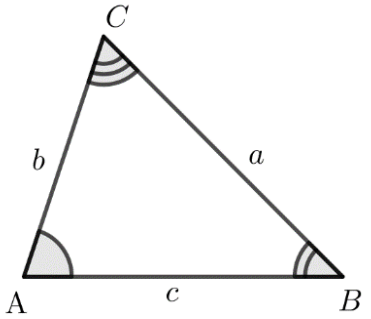


ЈЕДНАКОКРАКИ ТРОУГАО

- Површина троугла $P = \frac{ah}{2}$

- Обим троугла $O = a + 2b$, где је a основица, b су краци једнакокраког троугла, а h висина која одговара страници a
- Темена троугла: A, B и C
- Странице троугла AB, BC и AC
- Странице BC и AC су једнаких дужина
- Углови: $\measuredangle BAC, \measuredangle ABC$ и $\measuredangle BCA$
- Углови $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle ABC$ су једнаки

3) Неједнакостраничне (све три странице су различите)



НЕЈЕДНАКОСТРАНИЧНИ ТРОУГАО

- Површина троугла $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$

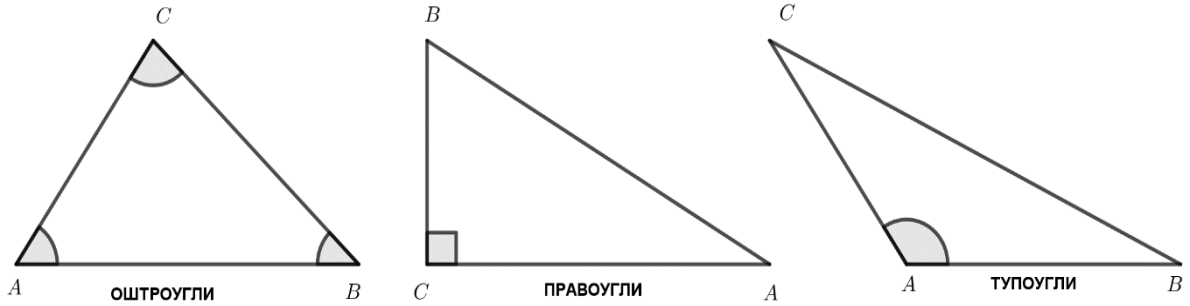
- Обим троугла $O = a + b + c$

Површину троугла можемо израчунати и користећи **Херонов образац**.

$P = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$ где је S полуобим троугла, односно $S = \frac{O}{2} = \frac{a+b+c}{2}$.

Троуглове према угловима делимо на:

- Оштроугле (сви углови оштри)
- Правоугле (један угао прав)
- Тупоугле (један угао туп).



Код правоуглог троугла странице које образују прав угао називамо катете, а трећу хипотенуза.
<u>*Теорема(Питагорина теорема):*</u> Квадрат над хипотенузом једнак је збиру квадрата над обе катете $c^2 = a^2 + b^2$.

<u>*Теорема:*</u> Углови на основици једнакокраког троугла су једнаки.

<u>*Теорема:*</u> Наспрам веће странице у троуглу лежи већи угао и обрнуто.

<u>*Теорема:*</u> Збир свих унутрашњих углова троугла једнак је збиру два права угла (180°).

<u>*Теорема:*</u> У троуглу је збир ма које две странице већи од треће, а разлика ма које две странице мања од треће.

Четвороугао

Дефиниција. Четвороугао је многоугао који има четири различита темена.

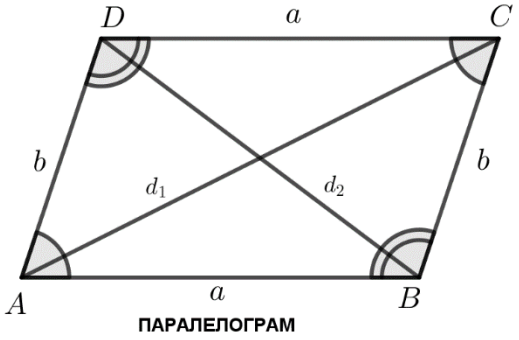
Према броју паралелних страница четвороуглове делимо на:

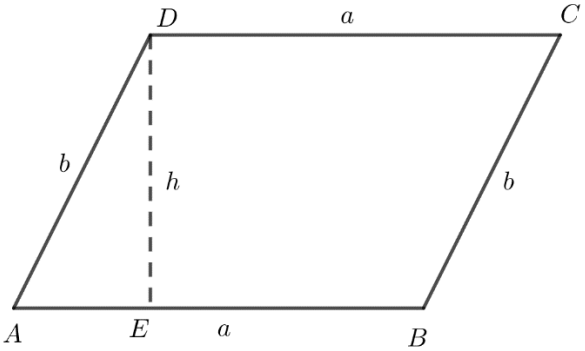
- Паралелограме (са два пара паралелних страница)
- Трапезе (са једним паром паралелних страница)
- Трапезоиде (немају паралелне странице)

Дефиниција. Дијагонала је дуж која спаја два несуседна темена неког многоугла.

<u>*Теорема:*</u> Ако је четвороугао паралелограм, онда:

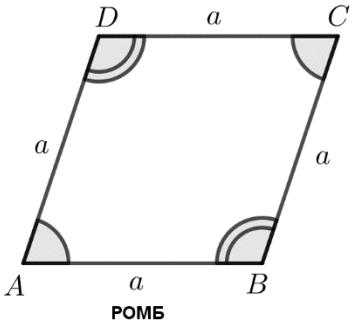
1) Наспрамне странице су једнаке
2) Наспрамни углови су једнаки
3) Збир два суседна угла једнак је збиру два права угла
4) Дијагонале се полове.



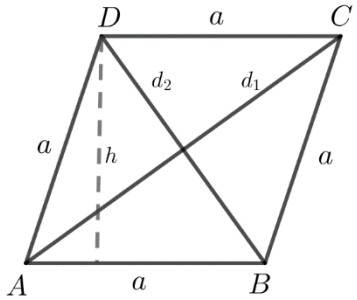


- Површина паралелограма рачуна се по формули $P = ah$, где је a дужина странице AB а h њој одговарајућа висина.
- Обим паралелограма рачуна се по формули $O = 2a + 2b$.

Дефиниција. Паралелограм чије су све странице једнаке прави називамо ромб.



Теорема: Паралелограм је ромб акко:
1) Дијагонале су међусобно нормалне
2) Дијагонале се полове.

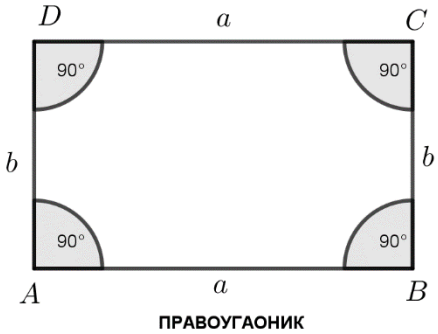


- Површина ромба $P = ah = \frac{d_1 d_2}{2}$

- Обим ромба $O = 4a$

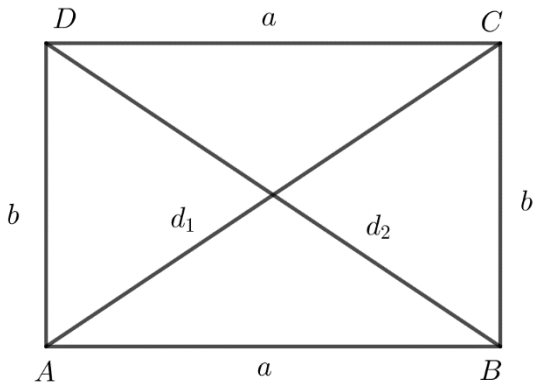
- Важи Питагорина теорема $a^2 = (\frac{d_1}{2})^2 + (\frac{d_2}{2})^2$

Дефиниција. Паралелограм чији су сви углови прави називамо правоугаоник.



Теорема: Паралелограм је правоугаоник акко су му дијагонале једнаке.

Дакле, **правоугаоник** је четвороугао чије су наспрамне странице једнаких дужина и чији су сви углови прави.



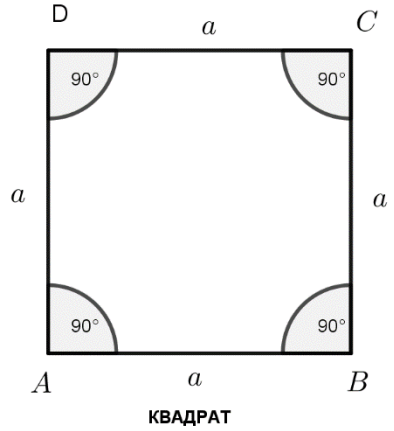
- Површина правоугаоника $P = ab$

- Обим правоугаоника $O = 2a + 2b$

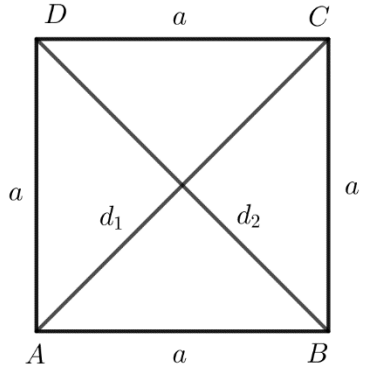
- Дијагонала се рачуна по формули $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$d_1 = d_2$

Дефиниција. Правоугаоник чије су све странице једнаке називамо квадрат.



<u>Теорема:</u> Правоугаоник је квадрат акко:
1) Дијагонале су међусобно нормалне
2) Дијагонале су симетрале углова



- Површина квадрата $P = a^2$

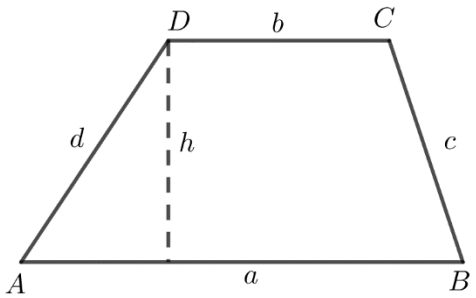
- Обим квадрата $O = 4a$

- Дијагонала квадрата $d = a\sqrt{2}$

$d_1 = d_2$

Дакле, **квадрат** је четвороугао чије су све странице једнаке дужине и сви углови прави.

Дефиниција. Трапез је четвороугао који има један пар паралелних страница.



ТРАПЕЗ

- Површина трапеза $P = \frac{a+b}{2}h$ или $P = mh$ где је $m = \frac{a+b}{2}$ средња линија трапеза, a и b дужине паралелних страница, а h одговарајућа висина.

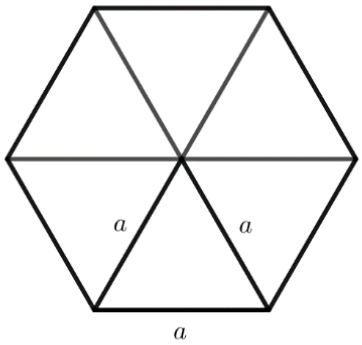
- Обим трапеза $O = a + b + c + d$

Правилни многугао

Многоугао чије су све странице једнаке и сви унутрашњи углови једнаки називамо **правилним многоуглом**.
Правилни многоуглови су нпр. једнакостраничан троугао, квадрат…

Дефиниција. Правилни шестоугао је шестоугао код кога су све странице једнаке дужине и сви унутрашњи углови једнаки.

-Обим правилног шестоугла $O = 6a$
-Површина правилног шестоугла $P = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$



ПРАВИЛНИ ШЕСТОУГАО

Са слике видимо да је правилан шестоугао дужине странице a састављен од шест једнакостраничних троуглова па је отуда и његова површина шест пута већа од површине једнакостраничног троугла дужине странице a.

Круг и кружница

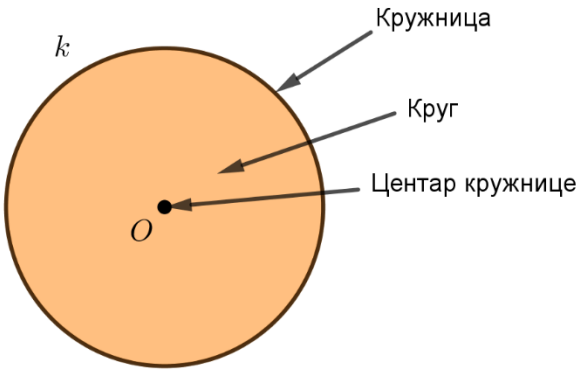
Дефиниција. Кружница је затворена крива линија у равни чије се све тачке налазе на истом одстојању од неке фиксне тачке O у истој равни. Тачка O зове се центар кружнице.

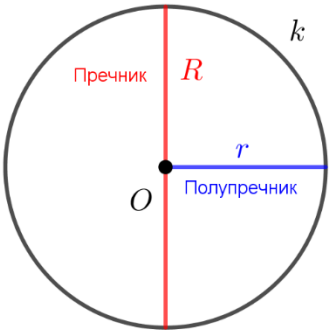
Дуж која спаја центар са било којом тачком на кружници назива се **полупречник кружнице**. Све тачке кружнице једнако су удаљене од центра.

Дуж која спаја било које две тачке на кружници, а пролази кроз центар, назива се **пречник кружнице**.

Кружницу обележавамо малим словом латинице k, полупречник малим словом латинице r, а пречник великим словом латинице R.

Дефиниција. Део равни ограничен кружницом је геометријска фигура која се зове круг.





- Обим круга рачунамо по формули $O = 2r\pi$.

- Површину круга рачунамо по формули $P = r^2\pi$, где је r полупречник круга (кружнице) а π математичка константа и приближно је $\pi \approx 3{,}14$.

Навешћемо неке значајне геометријске фигуре у простору

Дефиниција. Тела ограничена само равним површинама називају се **рогљаста тела**. Таква тела су: квадар, коцка, пирамида и многа друга.

Тела ограничена само кривим, или кривим и равним површинама, називају се **обла тела**. Таква тела су: ваљак, купа, лопта.

Дефиниција. Полиедар је геометријска фигура омеђена са четири или више мнооуглова који се називају стране или пљосни полиедра и коме су ивице дужи.

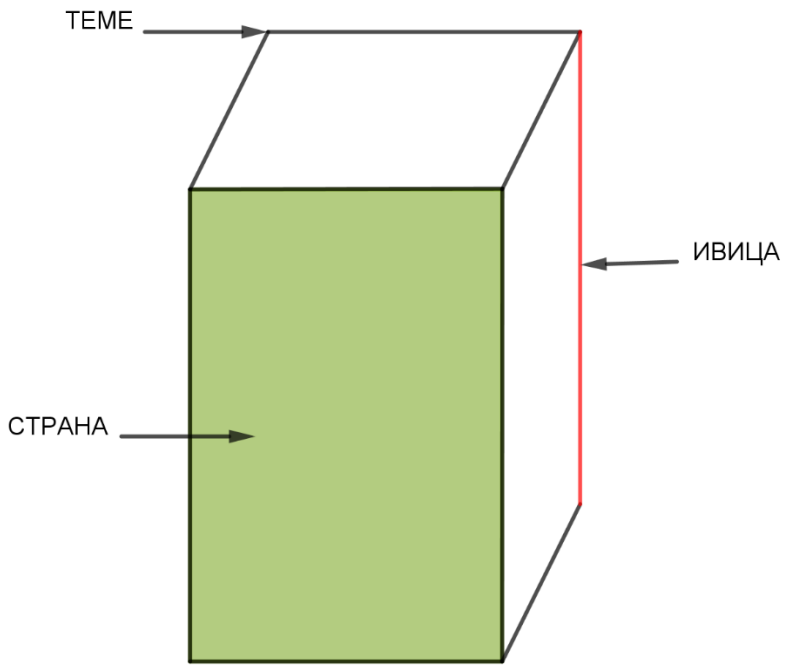
Дефиниција. Призма је полиедар ограничен са две паралелне подударне основе које су повезане паралелограмима (бочним странама).
Висина призме је растојање између основа.
Призма је правилна ако је њена основа правилан многоугао.

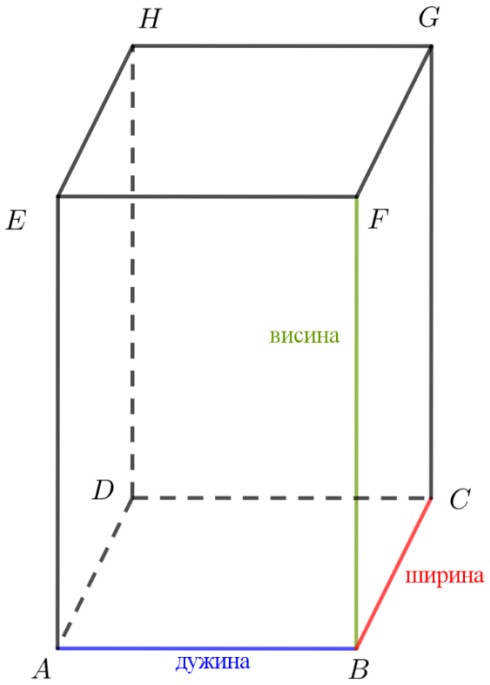
-Површину призме рачунамо по формули $P = 2B + M$, где је B површина базе а M површина омотача призме.
-Запремину призме рачунамо по формули $V = B \cdot H$, где је B површина базе а H висина призме.

Квадар

Дефиниција. Квадар је геометријско тело ограничено са 6 страна. Све стране квадра су правоугаоници. Наспрамне стране квадра подударне су и паралелне.

Квадар има 12 ивица и 8 темена. Из сваког темена полазе по 3 различите ивице. Ивице квадра разврставамо у 3 групе од по 4 ивице које су подударне и паралелне. Њихове дужине означавамо најчешће са a, b и c, а називамо их дужина, ширина и висина.



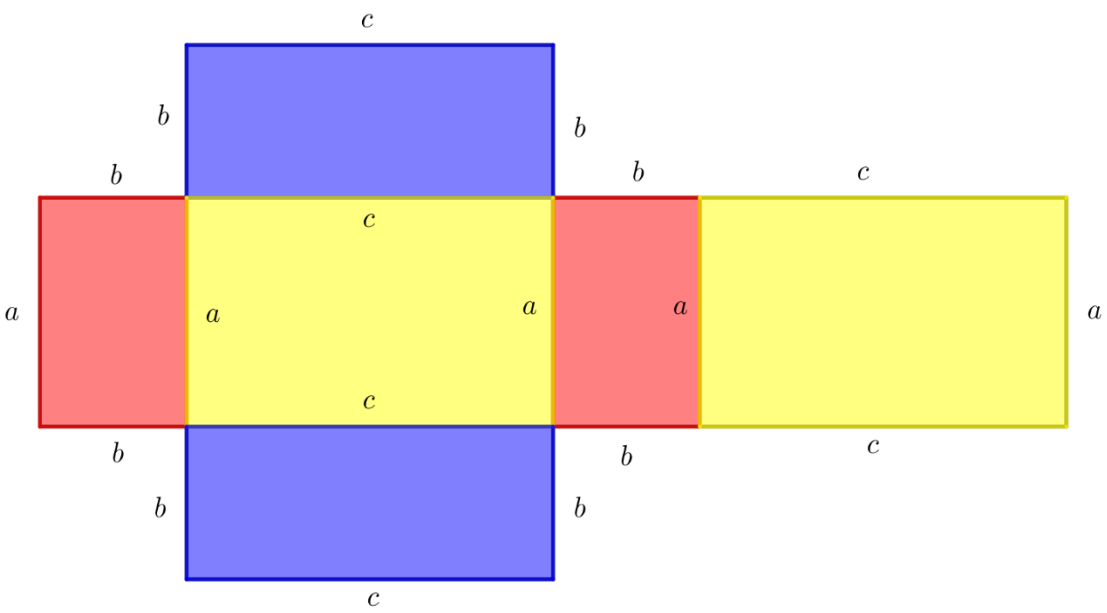


КВАДАР

Квадар са слике изнад именујемо као квадар $ABCDEFGH$.
Темена квадра су тачке: A, B, C, D, E, F, G и H.
Ивице квадра су дужи: $AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, AE, BF, CG$ и DH.
Стране квадра су правоугаоници: $ABCD, ABFE, BCGF, CDHG, DAEH$ И $EFGH$.

Мрежа квадра

Мрежа квадра састоји се од 6 правоугаоника. Уочавамо три пара једнаких правоугаоника. Једнаки правоугаоници су обојени истом бојом.



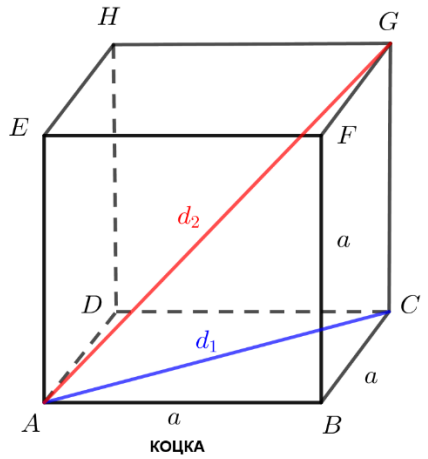
МРЕЖА КВАДРА

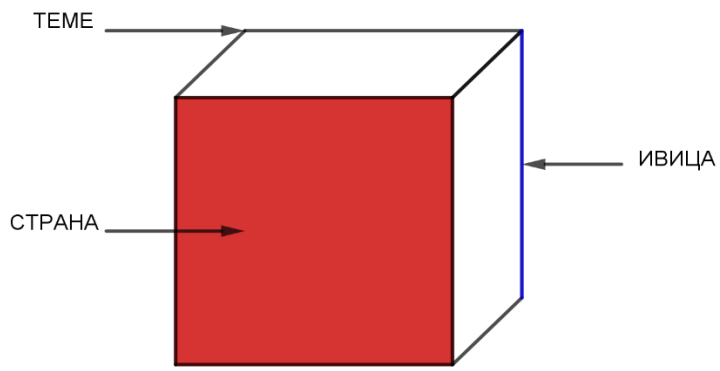
- Површину квадра рачунамо по формули $P = 2(ab + ac + bc)$
- Запремину квадра рачунамо по формули $V = abc$, где су a, b и c дужина, ширина и висина квадра.

Коцка

Дефиниција. Коцка је квадар чије су све ивице једнаке. Стране коцке су подударни квадрати.

Коцка има 12 ивица, 8 темена и 6 страна. Све ивице коцке су једнаке и све стране коцке су подударне. Како су јој све ивице једнаке, коцка има само дужину. Означавамо је са a.

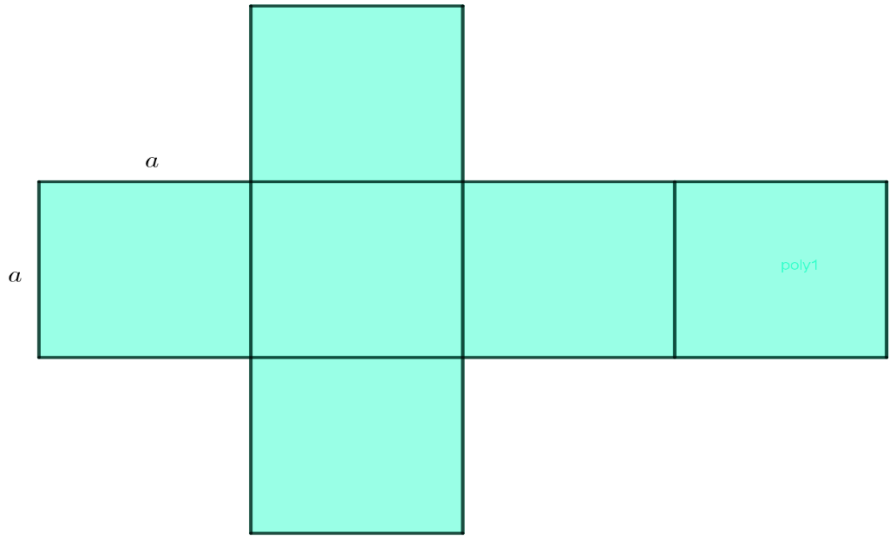




Коцку са слике изнад именујемо као коцка $ABCDEFGH$.
Темена коцке су тачке: A, B, C, D, E, F, G и H.
Ивице коцке су дужи: $AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, AE, BF, CG$ и DH.
Стране коцке су квадрати: $ABCD, ABFE, BCGF, CDHG, DAEH$ И $EFGH$.

Мрежа коцке

Мрежа коцке састоји се од 6 подударних квадрата.

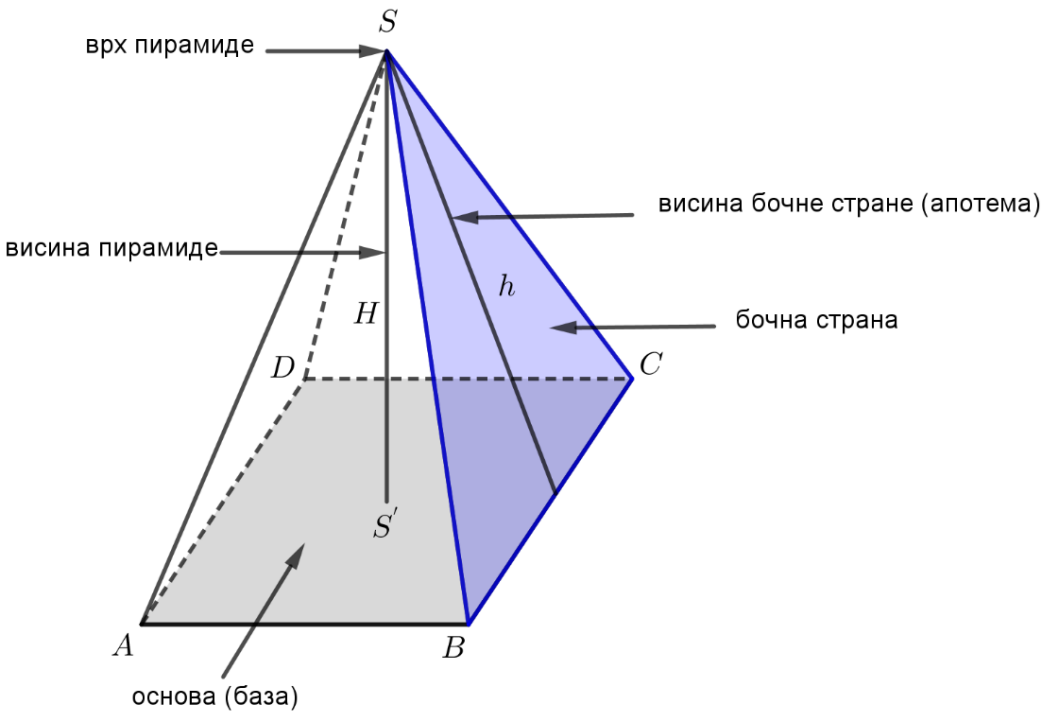


МРЕЖА КОЦКЕ

- Површину коцке рачунамо по формули $P = 6a^2$
- Запремину коцке рачунамо по формули $V = a^3$ где је a дужина ивице коцке
- Дужину мале дијагонале рачунамо по формули $d_1 = a\sqrt{2}$
- Дужину велике дијагонале рачунамо по формули $d_2 = a\sqrt{3}$

Пирамида

Дефиниција. Полиедар чија је једна страна (основа) многоугао а све остале (бочне) стране троуглови чије је једно теме заједничко зове се пирамида.



– Тачка S се зове врх пирамиде;
– Ивице AB, BC, CD и DA су основне ивице;
– Ивице SA, SB, SC и SD су бочне ивице;
– Дуж SS' где је S' ортогонална пројекција тачке S на раван основе је висина пирамиде.
– Висина h једне од бочних страна, рецимо SBC, зове се апотема.

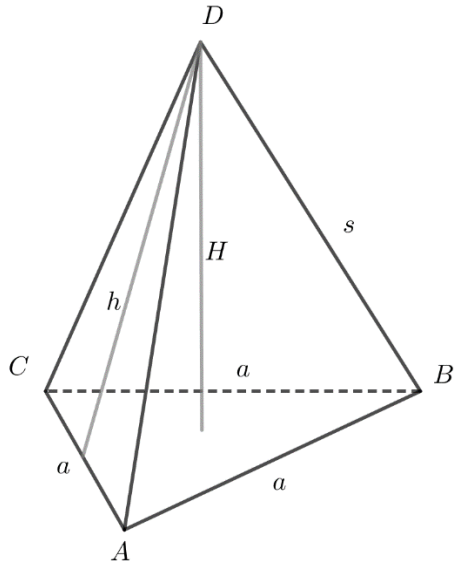
-Површину пирамиде рачунамо по формули $P = B + M$, где је B површина базе а M површина омотача пирамиде.

-Запремину пирамиде рачунамо по формули $V = \frac{B \cdot H}{3}$, где је B површина базе а H висина пирамиде.

Дефиниција. Правилна пирамида је пирамида чија је основа правилан многоугао и ако је ортогонална пројекција тачке S врха пирамиде на раван основе центар тог многоугла.

Постоји правилна тространа пирамида, четворострана, петострана, шестострана...

Правилна тространа пирамида: (основа – једнакостранични троугао, стране – једнакокраки троуглови)

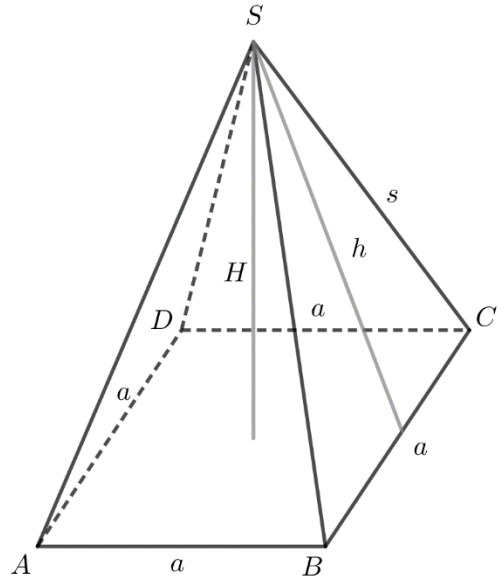


ПРАВИЛНА ТРОСТРАНА ПИРАМИДА

Површина правилне тростране пирамиде $P = B + M = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\frac{ah}{2}$

Запремина правилне тростране пирамиде $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$

Правилна четворострана пирамида: (основа – квадрат, стране – једнакокраки троуглови)

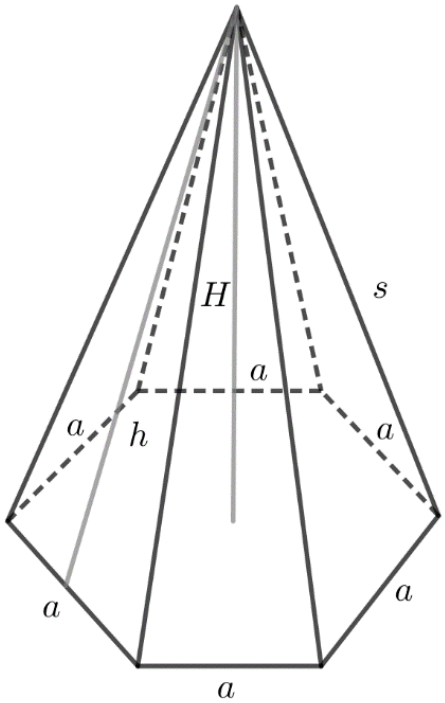


ПРАВИЛНА ЧЕТВОРОСТРАНА ПИРАМИДА

Површина правилне четворостране пирамиде $P = B + M = a^2 + 4\frac{ah}{2} = a^2 + 2ah$

Запремина правилне четворостране пирамиде $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H$

Правилна шестострана пирамида: (основа – правилан шестоугао, стране – једнакокраки троуглови)



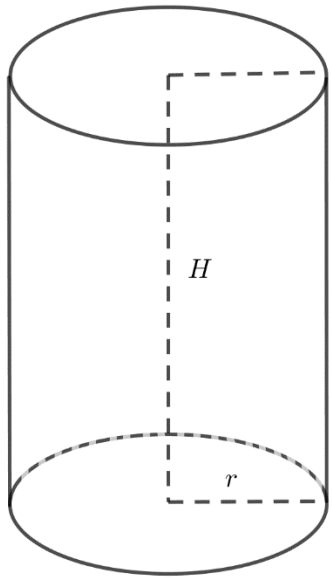
ПРАВИЛНА ШЕСТОСТРАНА ПИРАМИДА

Површина правилне шестостране пирамиде $P = B + M = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6\frac{ah}{2}$

Запремина правилне шестостране пирамиде $V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{1}{3} \cdot 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H$

Дефиниција. Ваљак је геометријско тело које се састоји од две основе (базе) и омотача.

Основе ваљка чине два круга једнаког полупречника док је омотач ваљка правоугаоник коме је дужина једне странице једнака обиму круга, док је дужина друге странице једнака висини ваљка.



ВАЉАК

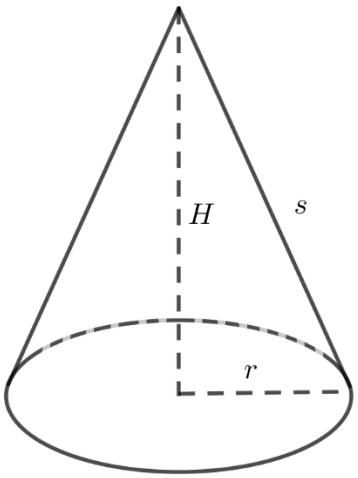
Површина ваљка $P = 2B + M = 2r^2\pi + 2r\pi H$

Запремина ваљка $V = B \cdot H = 2r^2\pi \cdot H$, где је H висина ваљка, а r полупречник круга који се налази у основи ваљка.

Дефиниција. Купа је геометријско тело које се састоји из основе и омотача. Основа купе је круг, док је омотач обртна конусна површ.

Висина купе (*H*) спаја врх купе и центар круга који је у основи купе.

Изводница купе (*s*) је дуж која спаја врх купе и кружницу у основи.

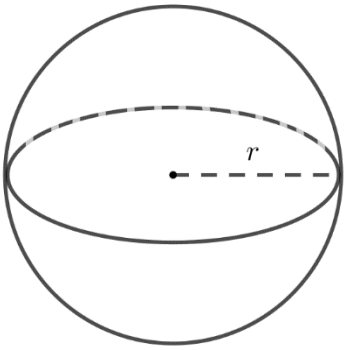


КУПА

Површина купе $P = B + M = r^2\pi + r\pi s$

Запремина купе $V = \frac{1}{3}B \cdot H = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot H$, где је H висина купе, s изводница купе а r полупречник круга који се налази у основи купе.

Дефиниција. Лопта је геометријско тело ограничено сфером (омотачем лопте). Сфера је скуп тачака једнако удаљених од неке тачке у простору (удаљеност обележавамо са r), док лопти припадају све тачке које су на мањој или једнакој удаљености од r од те тачке (центра лопте).



ЛОПТА

Површина лопте $P = 4r^2\pi$

Запремина купе $V = \frac{4}{3}r^3\ \pi$, где је r полупречник лопте.

Задаци

1. Ако се страница квадрата увећа за 3 cm, површина му се повећа за 75 cm^2. Израчунати обим и површину тог квадрата.

Решење.

Обележимо страницу квадрата са a . Његова површина је $P_1 = a^2$.

Ако се страница повећа за 3 cm, тада ће страница бити $(a + 3)$ а површина $P_2 = (a + 3)^2$

Према тексту задатка ће бити:

$P_1 = a^2$

$P_2 = (a + 3)^2$

$P_2 - P_1 = 75\ cm^2$

$(a + 3)^2 - a^2 = 75$

$a^2 + 6a + 9 - a^2 = 75$

$6a + 9 = 75$

$6a = 75 - 9$

$6a = 66$

$\boldsymbol{a = 11}$

Израчунајмо сада обим и површину квадрата.

$O = 4a$	$P = a^2$
$O = 4 \cdot 11$	$P = 11^2$
$O = 44\ cm$	$P = 121 cm^2$

2. Ако се ивица коцке продужи за 3 cm, површина јој се повећа за 198 cm^2 . Израчунати површину и запремину коцке.

Решење.

Обележимо ивицу коцке са a . Њена површина је $P = 6a^2$.

Ако се ивица коцке повећа за 3 cm, њена ивица ће бити $(a + 3)$ а површина
$P_1 = 6(a + 3)^2$

Према тексту задатка ће бити:

$P_1 - P = 198\ cm^2$

$6(a + 3)^2 - 6a^2 = 198 \quad /: 6$

$(a + 3)^2 - a^2 = 33$

$a^2 + 6a + 9\ - a^2 = 33$

$6a + 9 = 33$

$6a = 33 - 9$

$6a = 24$

$\boldsymbol{a = 4\ cm}$

Израчунајмо сада површину и запремину коцке.

$P = 6a^2$

$P = 6 \cdot 4^2$

$P = 6 \cdot 16$

$P = 96\ cm^2$

$V = a^3$

$V = 4^3$

$V = 64\ cm^2$

3. Дужине основних ивица праве тростране призме односе се као $17: 10: 9$, дужина бочне ивице је 16 cm , а површина износи 1440 cm^2. Одредити дужине основних ивица.

Решење.

$a: b: c = 17: 10: 9$

$H = 16cm$

$P = 1440\ cm^2$

Из $a: b: c = 17: 10: 9$ следи $a = 17k, b = 10k, c = 9k$

$P = 2B + M$

Искористићемо Херонов образац да бисмо израчунали површину основе.

$$B = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$S = \frac{O}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \frac{17k + 10k + 9k}{2}$$

$$S = \frac{36k}{2} = 18k$$

Вратимо се сада на Херонов образац

$$B = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$B = \sqrt{18k(18k-17k)(18k-10k)(18k-9k)}$$

$$B = \sqrt{18k \cdot 1k \cdot 8k \cdot 9k}$$

$$B = \sqrt{1296k^4}$$

$$B = 36k^2$$

У омотачу M имамо три правоугаоника па ће бити

$$M = aH + bH + cH = H(a+b+c) = H \cdot 2S$$

$$M = 16 \cdot 38k$$

$$M = 576k$$

$$P = 2B + M$$

$$1440 = 2 \cdot 36k^2 + 576k$$

$$72k^2 + 576k - 1440 = 0 \quad /:72$$

$$k^2 + 8k - 20 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2}$$

$$k_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{2}$$

$$k_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{2}$$

$$k_{1,2} = \frac{-8 \pm 12}{2}$$

$$k_1 = \frac{-8 + 12}{2} = 2$$

$$k_2 = \frac{-8 - 12}{2} = -10$$

Друго решење није могуће па узимамо само $k_1 = 2$

Сада, $a = 17k = 17 \cdot 2 = 34\ cm$, $b = 10k = 10 \cdot 2 = 20\ cm$, $c = 9k = 9 \cdot 2 = 18\ cm$

4. Површина базе правилне четворостране призме је $49\ cm^2$, а висина призме је $3\ cm$. Израчунај површину призме.

Решење.

У основи (бази) правилне четворостране призме налази се квадрат. Како нам је у задатку дата површина базе, лако ћемо помоћу формуле за површину квадрата израчунати страницу основе.

$B = a^2$

$49 = a^2$

$a = \sqrt{49}$

$\boldsymbol{a = 7cm}$

Сада, $P = 2B + M$

У омотачу M имамо четири правоугаоника па ће бити

$M = 4aH$

$P = 2a^2 + 4aH$

$P = 2 \cdot 49 + 4 \cdot 7 \cdot 3$

$P = 98 + 84$

$P = 182\ cm^2$

5. Површина једне стране коцке је $64\ cm^2$. Израчунати површину и запремину коцке.

Решење.

Како је у задатку дата површина једне стране коцке, а знамо да је свака страна коцке квадарт, лако ћемо израчунати страницу квадрата, односно ивицу коцке.

$P = 64\ cm^2$

$a^2 = 64$

$a = \sqrt{64}$

$\boldsymbol{a = 6\ cm}$

$P = 6a^2$ $\qquad$ $V = a^3$

$P = 6 \cdot 6^2 = 6 \cdot 36$ $\qquad$ $V = 6^3$

$P = 216cm^2$ $\qquad$ $V = 216cm^3$

6. Од картона површине $195cm^2$ изрезана је мрежа коцке, те је отпадак био површине $45cm^2$. Израчунај ивицу те коцке.

Решење.

Израчунајмо прво колико картона је утрошено за мрежу коцке

$195cm^2 - 45cm^2 = 150cm^2$

За мрежу коцке утрошен је картон површине $150cm^2$.

Површину коцке (самим тим и мреже коцке) рачунамо по формули $P = 6a^2$

Па израчунајмо ивицу коцке

$150 = 6a^2$

$a^2 = 150 : 6$

$a^2 = 25$

$a = \sqrt{25}$

$a = 5\ cm$