

# Предмет, задаци и исходи Методике почетне наставе математике

- Грч. Μέθοδος – пут, начин, средство извршавања, остваривања...
- Сродни појмови:
  - Математичко образовање (mathematics education),
  - Наука о математичком образовању (research in mathematics education),
  - Дидактика математике (грч. διδάσκειν - поучавати)
- Дефиниције МНМ:
  - МНМ проучава законитости образовања и васпитања у наставном предмету Математика.
  - МНМ посебно проучава циљеве, задатке, исходе, психолошко-логичке и дидактичке основе наставе математике.
  - МНМ је научно-истраживачка и развојна дисциплина, чији је циљ идентификовати, окарактерисати и разумети појаве и процесе који се јављају или би се могли јавити у процесу предавања и учења математике на било ком нивоу образовања.
- Математика – наука о квантитативним односима и просторним облицима.
- Настава математике – наставни предмет у коме се образовање и васпитање ученика остварује помоћу математичких садржаја.
  - Разлика између Математике (науке) и Математике (наставног предмета) је у начину сазнавања математичких садржаја.

# Предмет, задаци и исходи Методике почетне наставе математике

- Математика је претпоставка за наставу математике, а настава математике је претпоставка за методiku наставе математике.
- Подела МНМ према нивоима образовања:
  - Методика развоја почетних математичких појмова,
  - Методика почетне наставе математике,
  - Методика у предметној настави математике,
  - Методика наставе математике у средњем образовању,
- Предмет проучавања МНМ:
  - Претпоставке важне за предавање и учење математике,
  - Развој математичких концепата код ученика,
  - Улога језика и утицај наставника на учење математике,
  - Друштвени аспекти предавања/учења математике,
  - Ставови према математици.
- Подручја истраживања и развоја МНМ:
  - Развој и имплементација планова и програма (curriculum design and implementation),
  - Методе предавања и учења математике (instruction),
  - Праћење постигнућа и вредновање резултата ученика (assessment).

# Предмет, задаци и исходи Методике почетне наставе математике

- Методика почетне наставе математике проучава:
  - Циљеве, задатке и исходе почетне наставе математике,
  - Наставне принципе,
  - Наставне облике и методе,
  - Организацију наставе,
  - Поступке при формирању математичких представа , појмова и процедура,
  - Методичку интерпретацију садржаја наставе,
  - Избор и распоред наставних садржаја,
  - Праћење и напредовање у настави математике.
  
- Основна питања повезана са наставом математике:
  1. Зашто се изучава математика? – Циљеви, задаци и исходи,
  2. У ком узрасту и које садржаје изучавати? – Избор садржаја наставе,
  3. Како изучавати математику? – Облици и методе наставног рада.

# Предмет, задаци и исходи Методике почетне наставе математике

1. Циљеви, задаци и исходи изводе се из општих циљева задатака наставе, а односе се на промене које треба да настану код ученика – знања, умења и навике које ученици треба да стекну.
2. Избор садржаја наставе зависи од узраста ученика и карактера математичке науке.
  - Напредак науке повећава обим научних информација, а самим тим и обим школског курикулума математике.
  - Ограничења су узраст ученика и ограничено наставно време.
  - Избор наставних садржаја треба да задовољи следеће критеријуме:
    - Унутрашњу логику математичких садржаја,
    - Узајамну везу наставних садржаја са једне стране и циљева, задатака и исхода наставе са друге стране,
    - Могућности дидактичке обраде садржаја у зависности од узраста ученика,
    - Задовољење дидактичких принципа.

# Предмет, задаци и исходи Методике почетне наставе математике

3. За решавање проблема који се односе на облике и методе наставног рада треба одговорити на питање како изучавати математику са циљем добијања оптималних резултата наставе у зависности од услова у којима се она реализује.
- Предмет МНМ не треба схватати статично, већ развојно.
  - Задаци МПНМ:
    - Избор математичких садржаја,
    - Одређивање структуре (распореда) одабраних садржаја,
    - Брига о научној заснованости математичких садржаја,
    - Осавремењивање математичких садржаја у складу са развојем математичке науке,
    - Примена и усавршавање наставних облика, метода, средстава и помагала у настави,
    - Развијање интересовања ученика за математику,
    - Брига о личности ученика,
    - Стварање логичке и психолошко-педагошке основе наставе математике,
    - Развијање стваралачких способности ученика.

# Предмет, задаци и исходи МПНМ почетне наставе математике

- Задаци МПНМ везани за студенте:
  - Да упозна студенте са теоријским основама предмета и стручно припремљеног студента уведе у улогу реалног извођача наставе математике,
  - Разрада основношколских тема математике.
- Исходи МПНМ који се односе на студенте:

На крају курса МПНМ студенти треба да:

- Знају да организују почетну наставу математике према савременим достигнућима из дидактике и сродних наука,
- Умеју да планирају и припремају ПНМ,
- Умеју да практично реализују ПНМ применом савремених сазнања из теорије и праксе,
- Анализирају и унапређују сопствену праксу,
- Имају критички и стваралачки однос према теорији и пракси у ПНМ,
- Знају специфичности стручних, научних и методичких истраживања.

# АКСИОМЕ И ПОСТУЛАТИ МАТЕМАТИЧКОГ ОБРАЗОВАЊА

## - Аксиоме:

1. Интелигенција се не доноси рођењем, урођен је њен развојни пут.
2. Не постоји дар за образовну математику, постоје само јаче и слабије математичке диспозиције.
3. У сваком детету (изузев ментално тешко погођене деце) постоји:
  - Спонтана и врло јака тежња за разумевањем окружења,
  - Спонтана и врло јака тежња за стваралачким радом.

## - Напомене:

- Аксиоме 1 и 2 су скоро идентичне, јер се појмови интелигенција и математичка интелигенција скоро поклапају.
- Без упорног рада и посебних околности нема математичких открића.

# АКСИОМЕ И ПОСТУЛАТИ МАТЕМАТИЧКОГ ОБРАЗОВАЊА

## - Постулати:

1. Водити ученика кроз континуиран низ адекватних активности које га не скрећу са развојног пута његове интелигенције.
2. Допуштати ученику слободу да самостално ради – да сам изграђује појмове, открива чињенице и правила, самостално решава проблеме.
3. Математичко образовање је дужно да убрза, интензивира учеников ментални развој, тј. да максимално скрати и прошири развојни пут његове интелигенције
  - Између осталог, обратити пажњу на начин излагања материје, тежину задатака, зрелост ученика, ...



# ВЕЗА МЕТОДИКЕ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ СА ДРУГИМ НАУКАМА

- МНМ је интердисциплинарна научна дисциплина, која припада системима педагошких и математичких наука.
- Проблеми МНМ се односе на циљеве учења, наставне садржаје и њихову структуру, начине организације активности ученика и обучавање деце сходно њиховим особеностима.
  - Због тога учитељи треба да поседују знања и вештине које су у тесној вези са другим наукама: математиком, педагогијом, дидактиком, развојном психологијом, логиком, статистиком,...
- МНМ је везана за **математику** избором садржаја.
  - Избор садржаја врши се у зависности од когнитивних могућности ученика,
  - МПНМ изграђује интерпретацију тих садржаја,
  - Развој и напредак математичке науке рефлектује се и на наставу математике, али често са одређеним закашњењем због потребе решавања дидактичко-методичких проблема преобликовања нових научних резултата за потребе наставног процеса.
- Изграђивање посебних ставова за наставу математике није могуће без општих ставова васпитања и образовања, који су предмет **опште педагогије**.

# ВЕЗА МЕТОДИКЕ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ СА ДРУГИМ НАУКАМА

- МНМ користи **дидактичка** знања о законитостима које владају у наставном процесу, поступцима одабирања наставних садржаја, методама, техникама, организацији и начину вредновања ефеката наставе.
  - Однос дидактике са МНМ је однос од општег ка посебном.
  - Однос дидактике и МНМ има више нивоа:
    - Дидактика наставе математике – општа питања наставе математике,
    - Методичка трансформација математике на одређеном нивоу и профилу образовања – посебне методике НМ,
    - Конкретна упутства за реализацију појединих тема – дидактичко-методичка упутства за НМ.
- Сазнања у **психологији** о карактеристикама интелектуалног развоја ученика од великог су значаја за ПНМ.
  - Сазнања психологије о томе како ученици почетних разреда формирају и усвајају појмове су у основи математичког образовања и методичке интерпретације математичких садржаја.
- Један од основних циљева НМ је развијање способности ученика да математички мисле, закључују, генерализују и сл. што значи да наставниково познавање **логике** помаже у развијању правилног мишљења ученика.
- Савремена истраживања у МНМ се у највећој мери ослањају на статистичку обраду и тумачење прикупљених података, па је немогуће развијати и примењивати МНМ без познавања и употребе **статистике**.

# ПРЕГЛЕД ИСТОРИЈЕ РАЗВОЈА МЕТОДИКЕ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ

- Јан Амос Коменски (Jan Amos Komensky, 1592 – 1690) први велики педагог и дидактичар.
  - Идеолог и теоретичар прве школе матерњег језика (основне школе) са захтевима да она буде свеопшта, масовна, народна и општеобразовна, са следећим садржајима: читање и писање, аритметика и геометрија, наука о природи, географија, веронаука, ручни рад и певање. Оваква школа је требало да буде интегрисана на међународном нивоу.
  - Најпознатије дело му је Велика дидактика, и данас веома актуелна по садржају и начину излагања.
    - Општа и методичка питања наставе,
    - “Закони наставе” – дидактички принципи.
- Прва реална гимназија у Берлину – 1749. и Нормална школа у Бечу 1774.
- Песталоци (Johann Heinrich Pestalozzi, 1746 – 1827) – оснивач народне школе и пионир систематске наставе математике.
- Дистервег (Adolf Disterveg, 1790 – 1866) савремена настава математике као хармонија васпитне, образовне и практичне наставе математике.
- Дидактика математике – друга половина XX века, са низом сличних концепција:
  - Витман (1981) – реализација, истраживање и унапређење наставе математике,
  - Гризел и Штајнер (1992) – истраживачки и развојни задатак дидактике математике.

# РАЗВОЈ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ У СРБИЈИ

- Сомборска учитељска школа – Норма – 1778. До 1811. радила као тромесечни течај.
  - Први уџбеник методике наставе математике издат у Будиму 1798: Аврам Мразовић – *Руководство к науција числителној*.
- Препарадија у Сент-Андреји, 1812. – Краљевски педагогијум народа илирског (Regium Peadagogium Nacionis Iliricae).
  - 1816. прелази у Сомбор,
  - Математику је предавао Василије Булић по свом уџбенику *Предложенија численице трегубе и землеописаније*.
  - Ђорђе Натошевић 1857. издаје *Кратко упутство за учитеље* по Вуковом правопису.
- 1868. године се уводи обавезно основношколско образовање за децу од 6 до 12 година.
- 1871. Женска учитељска школа у Сомбору и Учитељска школа у Крагујевцу.
- 1874. Уводи се предмет методика наставе рачуна.

# РАЗВОЈ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ У СРБИЈИ

- 1929. године трајање учитељских школа се продужује на пет година. Математика се проучава четири године, а у петој општа методика. Као петогодишње, учитељске школе функционишу до 1980-тих.
- 1932. спојене мушке и женске учитељске школе.
- Почетком 1980-тих учитељске школе прерастају у педагошке академије (више школе).
  - Математика се проучава два семестра, као и Матодика наставе математике.
- 1993. године педагошке академије прерастају у четворогодишње факултете.
- Почетком 21. века факултети се укључују у болоњски процес, чиме се уводе мастер и докторске академске студије на учитељским факултетима.

# ИСТОРИЈСКИ РАЗВОЈ МАТЕМАТИКЕ

- Историја математике је уједно и историја људске делатности и борбе са природом.
- Стројк (Dirk J. Struik) – значајни историјски догађаји који су подстакли развој математике – освајања Александра Македонског, ширење Ислама, Ренесанса,...
- Периодизација развоја математике по Колмогорову:
  1. Етапа рађања математике,
  2. Етапа елементарне математике,
  3. Етапа математике променљивих величина,
  4. Етапа савремене математике.
- 1. Први математички појмови и представе формирају се још у праисторији посматрањем конкретних скупова предмета и утицајем потреба људи.
  - Бројање и стварање појма природног броја,
  - Прихватање декадног бројевног система,
  - Означавање бројева – најпре адитивно, а касније симболима.

# ИСТОРИЈСКИ РАЗВОЈ МАТЕМАТИКЕ

2. Етапа елементарне математике – Древни Исток, Античка Грчка, арапска математика, Европа од 13. до 17. века.
  - Геометрија,
  - Тригонометрија,
  - Аритметика,
  - Алгебра,
  - Позициони бројевни системи.
3. Етапа математике променљивих величина – од 17. до 19. века.
  - Аналитичка геометрија,
  - Функционалне зависности и геометријске трансформације,
  - Диференцијални и интегрални рачун.
4. Етапа савремене математике – од 19. века и даље.
  - Нееуклидске геометрије,
  - Теорија група,
  - Теорија скупова,
  - Функционална анализа, топологија, теорија хаоса и мноштво нових математичких дисциплина,
  - Развој рачунара – сужење границе између теоријске и примењене математике.





# МАТЕМАТИКА КАО НАУКА

- Математика
  - Је корпус знања у вези концепата попут: количине, структуре, простора, промене, као и наука која проучава те концепте.
  - Је наука о обрасцима (шемама, правилностима, енг. – patterns), које можемо открити у бројевима, природи, простору, рачунарима, апстракцијама.
  - Укључује баратање информацијама (размештање, анализу, манипулацију), стварање претпоставки и предвиђање исхода ситуација; решавање постављених проблема употребом језика који је уједно и концизан и прецизан.
  - Се развила из потребе за рачунањем, мерењем и систематичним проучавањем облика и кретања објеката из реалног света употребом апстрације и логичког закључивања.

**Конкретно**



**Апстрактно**

- Је својствена људском роду, јер ју је до неке мере развила свака цивилизација.
- Је оријентисана применама.

# МАТЕМАТИКА КАО НАУКА

- ОСНОВНИ МАТЕМАТИЧКИ КОНЦЕПТИ И ДИСЦИПЛИНЕ:
  - Количина (аритметика – природни бројеви, теорија бројева),
  - Структура (алгебра),
  - Простор (геометрије, топологија),
  - Промена (математичка анализа, теорија хаоса).
  
- ДРУГЕ МАТЕМАТИЧКЕ ОБЛАСТИ:
  - Филозофија математике, математичка логика,
  - Дискретна математика,
  - Примењена математика, методика, ...

# МАТЕМАТИКА КАО НАУКА

- МАТЕМАТИКА **НИЈЕ**:
  - Заокружен, затворен и завршен интелектуални систем,
  - Нумерологија, просто рачунање.
- ДОПРИНОС И ПРИМЕНЕ МАТЕМАТИКЕ:
  - Природне науке,
  - Техничке науке,
  - Технологија,
  - Медицина и бионауке,
  - Друштвене науке (економија, социологија,...),
  - Хуманистичке науке (психологија,...)

◦ ВЕЗА МАТЕМАТИКЕ И РЕАЛНОГ СВЕТА:



# НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ

- Математика као наставни предмет се заснива на Математици као науци, али има и неке своје специфичности.
- Настава је двосмерни, сврсисходни, плански, рационално организован процес у оквиру којег се врши преношење знања и искустава старијих генерација на млађе, у циљу њиховог оспособљавања за самостално и успешно сналажење у животном окружењу.
- У настави математике ученици се оспособљавају за квантитативно и квалитативно поимање света и формирање научног погледа на свет.
  - *MST (Mathematics – Science – Technology)* приступ развијању и усмеравању интересовања младих у развијеном свету.
- У образовно-васпитном процесу се врши својеврсна репродукција друштва, чиме се стварају претпоставке за развој појединца и друштва у целини.
- Настава у формалном образовању (школски систем).
  - *Deschooling...*

НЕ, НИЈЕ ПРОБЛЕМ ШТО СУ ЉУДИ ОБРАЗОВАНИ

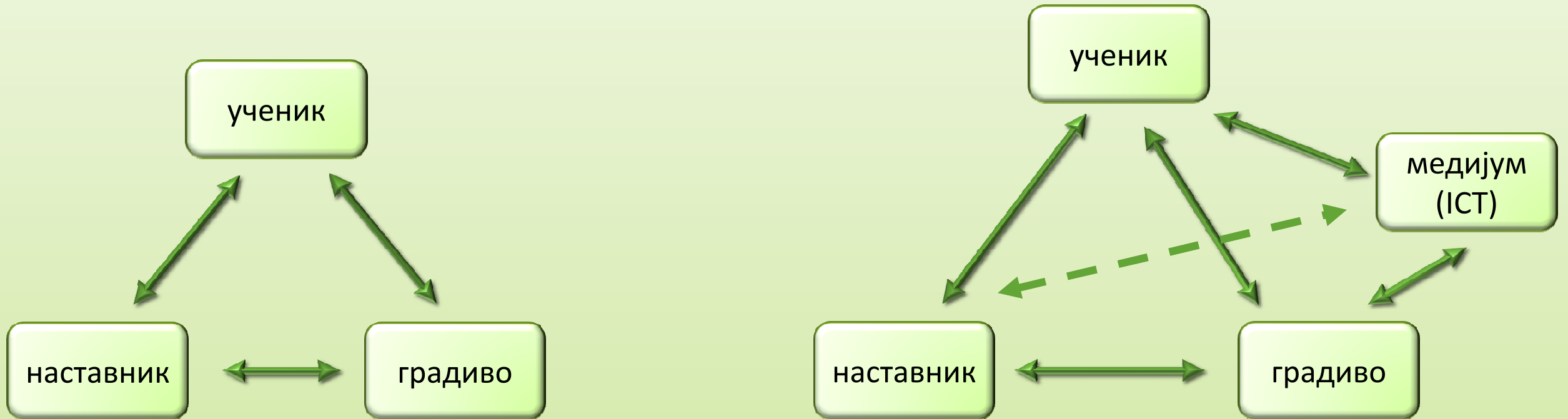


Проблем је што су образовани баш онолико колико је потребно да поверују у оно што су научили, али не и довољно да преиспитају оно чему су научени.

# НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ

ЧИНИОЦИ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ:

Педагошки троугао  Педагошки тетраедар



# НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ

## ПОЈМОВИ БИТНИ ЗА НАСТАВУ МАТЕМАТИКЕ:

- Планови и програми – циљеви, садржаји, исходи учења...
- Наставни приступи и методе, организација рада,
  - Позитивније резултате дају проблемска, хеуристичка, истраживачка настава, употреба ICT,
- Праћење рада и оцењивање ученика – дефинисано од стране министарства (стандарди и постигнућа ученика),
- Мотивација ученика (у ЕУ постоје националне стратегије за мотивацију ученика),
- Образовање и стручно усавршавање наставника,
  - Иницијално – факултети,
  - *LLL – Life Long Learning* – активи наставника, сарадња, семинари, лиценцирање.



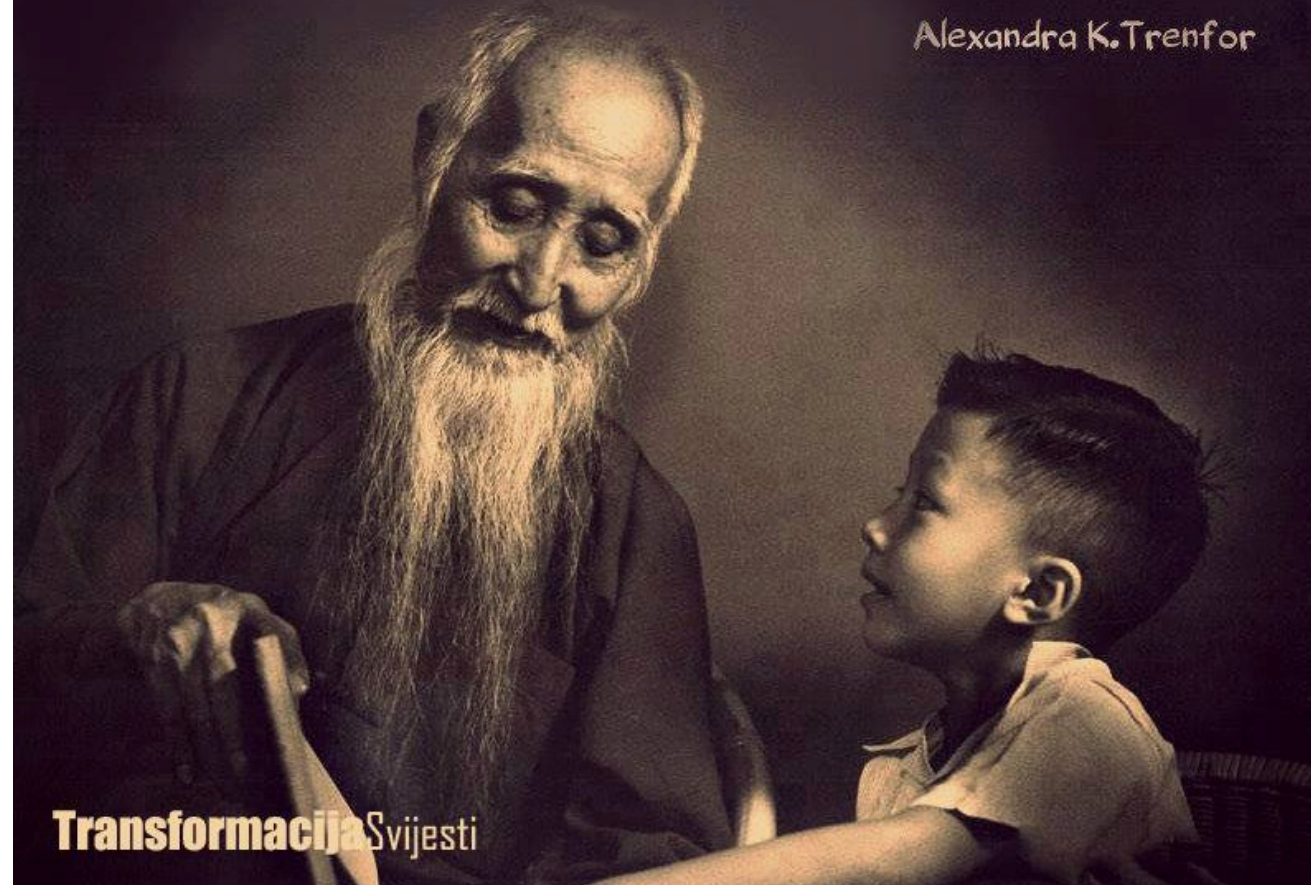
# НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ

## КОМПЕТЕНЦИЈЕ НАСТАВНИКА МАТЕМАТИКЕ:

- Мишљења, предлози, сугестије,...
- Стручне компетенције:
  - Способност формулисања доказа,
  - Способност математичког моделирања ситуације,
  - Способност решавања проблема употребом математичких алата
- Методичке компетенције,
- Организаторске способности,
- Личност наставника...

**Najbolji učitelj je onaj koji ti  
ukazuje gdje da gledaš,  
ali ti ne govori što da vidiš.**

Alexandra K. Trenfor



**Transformacija** Svijesti

# ПОЧЕТНА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ

- Математика је базични и општеобразовни предмет у основној школи. Њена функција је развијање способности ученика за рачунањем, проценама и логичким расуђивањем.
- Почетна настава математике (ПНМ) има улогу у развијању интелектуалних способности ученика, као и припремну улогу за стицање и усвајање математичких садржаја у вишим разредима.
- Циљеви наставе математике у основној школи:
  - Стицање математичких знања,
  - Развијање менталних способности ученика,
  - Развијање позитивних особина личности ученика.

# ПОЧЕТНА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ

- Задаци наставе математике:
  - Да ученици стекну математичка знања, умења и вештине,
  - Да развија културне, радне, етичке и естетске навике ученика,
  - Да развија способност ученика изражавања математичким језиком у писменом и усменом облику,
  - Да ученици стекну навику за коришћење што разноврснијих извора знања.
- Задаци могу бити: образовни, функционални, васпитни.
  - Образовни се односе на знања која ученици треба да стекну кроз наставу математике. Обично се исказују у форми исхода: ученици треба да *знају*, *схватају* итд.
  - Функционални задаци се односе на развијање одређених психичких способности ученика: перцепције, пажње, прецизног изражавања употребом математичког језика и сл.
  - Васпитни задаци у ПНМ се односе на утицај на морално, естетско и радно васпитање ученика. Обухватају развијање: истрајности, систематичности, самосталности у раду, самоконтроле и сл.

# ПОЧЕТНА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ

## Наставни програм ПНМ

- Обим наставног програма ПНМ одређује ширину знања и способности које ученици треба да стекну.
- Дубина наставног програма – интензитет којим се обрађују поједини садржаји.
- Редослед наставних садржаја.
- Избор садржаја зависи од:
  - Потреба друштва,
  - Развоја математичке науке,
  - Достигнућа у развоју педагошких и психолошких наука.
- Основне карактеристике садржаја ПНМ су апстрактност и хијерархијско-логички распоред.

# ПОЧЕТНА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ

Садржаји почетне наставе математике:

- Скупови
  - Начини формирања и приказивања,
  - Употреба одговарајуће терминологије.
- Аритметички садржаји
  - Природни бројеви и нула,
  - Аритметичке операције и њихове особине,
  - Бројевни изрази и њихова структура.
- Алгебарски садржаји
  - Откривање непознатог броја - једначине,
  - Неједначине,
  - Функције.
- Геометријски садржаји
  - Најпре на нивоу препознавања геометријских облика, а касније постепено проширивање и продубљивање знања.
- Мерење и мере – уз коришћење очигледних средстава.

# ОБРАЗОВНИ СТАНДАРДИ ПОСТИГНУЋА У ПНМ

- Образовни стандарди постигнућа су једна од мера усмерених ка подизању квалитета и унапређивању наставе. Уведени су 2011. године.
- Искази о темељним знањима и умењима које ученици треба да стекну до одређеног нивоа образовања.
- Стандарди постигнућа за наставни предмет Математика за крај првог циклуса утврђени су за следеће области:
  - Природни бројеви и операције са њима,
  - Геометрија,
  - Разломци,
  - Мерење и мере.

# ОБРАЗОВНИ СТАНДАРДИ ПОСТИГНУЋА У ПНМ

- Стандарди су конкретизовани у односу на сложеност захтева и обим знања на три нивоа постигнућа: основни, средњи и напредни.
- 1. На основном нивоу од ученика се очекује да влада појмовима бар у смислу њиховог разликовања уз коришћење одговарајућих термина и ознака. Уз помоћ интерпретације способан је за основно оперисање. Овај ниво би требало да постигну сви ученици, а најмање 80 % њих.
- 2. На средњем нивоу ученик издваја одговарајуће примере, оперише симболима, тачно рачуна и показује виши степен увежбаности рачуна. Очекује се да ће 50 % ученика постићи овај ниво.
- 3. На напредном нивоу ученик потпуно влада појмовима, оперише њима по прихваћеним правилима која уме да исказује вербално, уме да закључује на основу формално исказаних претпоставки и достиже висок степен аутоматског извођења операција. Очекује се да ће 25 % ученика постићи овај ниво.
- Овако одређени стандарди представљају основу по којој учитељ планира, припрема, бира садржаје и вреднује рад и постигнућа ученика.



# ОБРАЗОВНИ СТАНДАРДИ ПОСТИГНУЋА У ПНМ

- Ради остваривања садржаја на различитим нивоима, потребно је да учитељ прати испуњеност и брзину постизања стандарда за сваког ученика појединачно.
- Увођење образовних стандарда постигнућа у ПНМ ствара основу за диференцирање наставе.
- Увођење образовних стандарда постигнућа у ПНМ треба да обезбеди и оцењивање које је, пре свега, објективније, усаглашено са унапред постављеним критеријумима и које је упоредиво са постигнућима других ученика, али и са другим разредима, школама, регионима.
- Образовни стандарди постигнућа у ПНМ омогућавају ученицима и родитељима да имају увид у то шта се од њих очекује и шта ће се вредновати.

# ТЕОРИЈЕ КОГНИТИВНОГ РАЗВОЈА

- Организација ПНМ од наставника захтева познавање основних законитости развоја мишљења ученика. Морају се узети у обзир когнитивне могућности ученика, специфичности његовог сазнавања стварности и карактеристике његовог интелектуалног нивоа.
- Различите теорије когнитивног развоја човека тумаче однос појединца и средине на различите начине. И поред тога, постоји суштинска сагласност тих теорија у вези са утицајем учења и васпитања на развој личности.
- Теорија Пијажеа,
- Теорија Виготског,
- Теорија Брунера,
- Теорија Еблија.

# ТЕОРИЈА ПИЈАЖЕА

- Когнитивни развој детета биолошки је условљен, зависи од средине и одвија се у етапама.
  - Сваки стадијум обележен је појавом оригиналних структура,
  - Основни покретач развоја је систем *неравнотежа – еквилибрација*,
  - Сваки стадијум са структурама које га дефинишу чини посебан облик равнотеже.
- 1. Стадијум сензомоторне интелигенције (од рођења до 2. године, појаве говора).**
  - Моторно понашање, симболичка активност је минимална.
- 2. Преоперациони период (од 2. до 6. – 7. године).**
  - Мишљење је засновано на конкретној делатности,
  - Мишљење је егоцентрично,
  - Формирају се прве представе и појмови,
  - Одсуство реверзибилности и конзервације у мишљењу,
  - Математичко образовање у овом узрасту се своди на стварање услова – обликовање средине.

# ТЕОРИЈА ПИЈАЖЕА

## 3. Стадијум конкретних операција (од 6. – 7. до 11. – 12. године).

- Превазилази се егоцентричност мишљења,
- Развијају се математичке структуре и овладава се логичким операцијама,
  - Класификација – груписање предмета према одређеним особинама,
  - Серијација – уређивање објеката у низове по неком својству,
  - Конзервација – разумевање непроменљивости величина – повезана са реверзибилношћу мишљења,
  - Придруживање или кореспонденција,
  - Еквивалентност и децентрација.
- Све операције мишљења ученика у овом стадијуму везане су за конкретне објекте и могу имати опажајни и представни ниво без којих ће ученик имати потешкоће у решавању вербалних задатака.

## 4. Ниво формалиних операција (од 12. године).

- Мишљење ученика се ослобађа конкретности,
- До изражаја долази симболичка активност и појмовно мишљење,
- Почиње закључивање према законима формалне логике.
- За формирање појмова у ПНМ битно је разумевање, тј. ученик може усвојити само оне појмове за које постоје развијене менталне структуре.
  - Учење се ослања на достигнути ниво развоја.

# ТЕОРИЈА ВИГОТСКОГ

- Московска школа – културно-историјска теорија развоја детета: психички развој личности је овладавање и присвајање културних вредности које је акумулирало човечанство.
- У процесу когнитивног развоја језик (говор) је основно оруђе које одређује како ће дете учити и размишљати јер се преко значења речи преносе развијени обрасци мишљења.
- Настава треба да води развој ученика, да буди и изазива низ функција које сазревају и налазе се у *зони наредног развитака*.
- **Зона актуелног развоја** – већ формиране и развијене функције. Одређују је задаци које ученик може самостално да реши.
- **Зона наредног развоја** – задаци које ученик може да реши уз нечију помоћ.
  - У сарадњи са осталима ученик подиже своје интелектуалне могућности на виши ниво,
  - Развој се одвија од социјалног ка индивидуалном.
- Периодизација дечјег развоја:
  - Предметно-манипулативна делатност (од 1. до 3. године),
  - Период игре (од 3. до 6. – 7. године),
  - Делатност везана за учење (од 6. до 10. године),
  - Друштвено значајна делатност (од 10. до 15. године),
  - Учење и професионално опредељење (од 15. до 18. године).

# ТЕОРИЈА ВИГОТСКОГ

- Фазе развоја појмова:
  1. Синкретичка етапа (млађи предшколски узраст),
  2. Етапа комплекса (старији предшколски узраст),
  3. Етапа правих појмова (почетак основношколског периода).
- Пресудну улогу у овом процесу има реч, па формирање појмова можемо описати следећим етапама:
  - Упознавање са активношћу,
  - Извођење конкретне радње,
  - Вербално описивање радње,
  - Описивање радње говором у себи,
  - Мисао о радњи.
- Узрасне карактеристике и способности које постоје код ученика треба познавати, али не да би им се прилагођавала настава, већ да би она послужила као основа за убрзавање развоја ученика.
  - Улога учитеља у ПНМ је да усредсреди пажњу на формирање и обликовање видова мишљења који се називају.

# ТЕОРИЈА БРУНЕРА

- Когнитивни развој не зависи од зрелости појединца, већ од учења и услова средине који тај развој могу да убрзају, успоре, па чак и зауставе.
- Ученик сазнаје свет сопственом активношћу – радећи, осећајући и путем симболичких средстава којима конструише свој модел стварности.
- Представљање има кључну улогу у когнитивном развоју.
- Равни апстракције (представљања):
  1. Акционо представљање – непосредне активности са конкретним материјалом,
  2. Иконичко (сликовно) представљање,
  3. Симболичко представљање – језиком, симболима (посебно математичким).
- Настава помаже интелектуалном развоју само ако у њој постоји јединство ова три начина представљања.
- У овом процесу водећу улогу има језик, најпре као допуна за показивање, затим за означавање присутних предмета, појава, а касније као носач за исказивање појмова, релација и сл.

# ТЕОРИЈА ЕБЛИЈА

- Стадијуми развоја дечјег мишљења су нужни след корака, али нису нужно зависни од узраста.
- **Оперативна метода** – изграђивање, унапређивање и учвршћивање покретних мисаоних операција уз њихово разумевање, увид у поступност корака и везу међу њима.
  - Важна је реверзибилност мишљења.

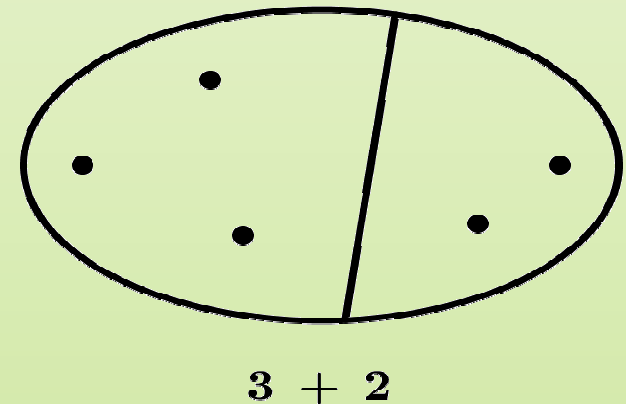
**Пример:** Операције сабирање и одузимање су правилно усвојене тек кад се постигне разумевање композиције (комутативност и асоцијативност) и реверзибилност.

- Интериоризација радње:
  1. Конкретан ступањ – рад са конкретним материјалом,
  2. Фигуративни ступањ – сликовито представљање, замишљање операције,
  3. Симболички ступањ.

**Пример:**  $3 + 2$

Конкретан ступањ – рад са конкретним предметима,

Фигуративни и симболички ступањ:





# ТЕОРИЈА ЕБЛИЈА

- Оперативна обрада – продубљивање разумевања операције добијене у процесу интериоризације.
  - Избегавати директну аутоматизацију радње.

Пример: Код сабирања бројева акценат не треба да буде на израчунавању што више збинова облика  $4 + 1$ ,  $6 + 2$ ,  $3 + 4$ , ... Целисходније би било поставити задатке следећих типова:

- Осмислити ситуације које означавају  $4 + 1$ ,  $6 + 2$ ,  $3 + 4$ , ...
  - Како то представити цртежима?
  - Како се мења резултат ако један сабирак повећамо (смањимо) за 1, 2, ...?
  - Шта ће се десити ако сабирцима заменимо места?
- Покретљивост операције је од кључног значаја за њено исправно прихватање и дуготрајност.

# УТИЦАЈ ТЕОРИЈА РАЗВОЈА МИШЉЕЊА НА ОРГАНИЗАЦИЈУ ПНМ

- При организовању ПНМ и опредељивању за конкретни методички поступак треба водити рачуна о карактеристикама мишљења ученика у појединим етапама његовог развоја.

Закључци изведени из анализираних теорија когнитивног развоја:

- Постепено прелазити од конкретних радњи на унутрашње процесе.
  - У почетку је неопходно обезбедити очигледност,
  - Прелаз од конкретном ка апстрактном треба пропратити правилном употребом говора, а касније и увођењем симболике.
- Ученику у ПНМ омогућити да знање стиче откривањем и сопственом активношћу.
- Усвојене математичке појмове продубљивати варирањем почетне ситуације и сагледавањем шта се постиже тим променама.
  - Варирати величине, поступке за решавање итд.
- Задатке бирати тако да што чешће буду у зони наредног развоја.

# МАТЕМАТИЧКО МИШЉЕЊЕ

- Математичко мишљење се одликује строгошћу и ригорозношћу примене мисаоних операција.
- Карактеристике математичког мишљења:
  1. Апстрактност,
  2. Тачност – логичка строгост,
  3. Оригиналност,
  4. Флексибилност,
  5. Флуентност (гипкост),
  6. Редифиниција,
  7. Елаборација.

# МАТЕМАТИЧКО МИШЉЕЊЕ

## 1. Апстрактност

- Математички објекти јесу апстрактни, али проистичу из конкретне стварности.
- При посматрању скупа материјалних предмета, посматрач одбацује низ својстава тог скупа, а задржава само једно или неколико битних својстава.
- Апстракција се даље може вршити и на већ формираним математичким објектима, чиме се врши њихова генерализација.
- Нивои апстракције:
  - Размишљање о предметима који су тренутно доступни чулима,
  - Размишљање о познатим предметима који тренутно нису доступни чулима,
  - Размишљање о материјалним предметима са којима особа није упозната или имагинарне визије, варијације и комбинације познатих и стварних материјалних објеката.
  - Математичко размишљање – формирање математичких појмова апстрахованих из стварног света.

**Пример:** Размотрити поступак ученика који треба да израчуна површину зидова учионице.

## 2. Тачност – логичка строгост

- У математици се већина резултата исказује квантитативно, што је карактерише као прецизну науку.
- Тачност у ширем смислу подразумева тачност свих закључака до којих се долази применом закона логичког мишљења.

# МАТЕМАТИЧКО МИШЉЕЊЕ

3. Оригиналноост се приписује оним продуктима мисаоних делатности којима се долази до нечег новог, необичног, ретког.

- Основна карактеристика оригиналноости изналажење решења која претходно нису била позната,
- Уколико је нешто ново за ученике, али не и за научну заједницу, онда се и то сматра њиховом оригиналношћу.
- У овом случају, оригиналноост се испољава у коришћењу познатих садржаја на нов и необичан начин, као и досетљивости и духовитости у њиховом коришћењу.

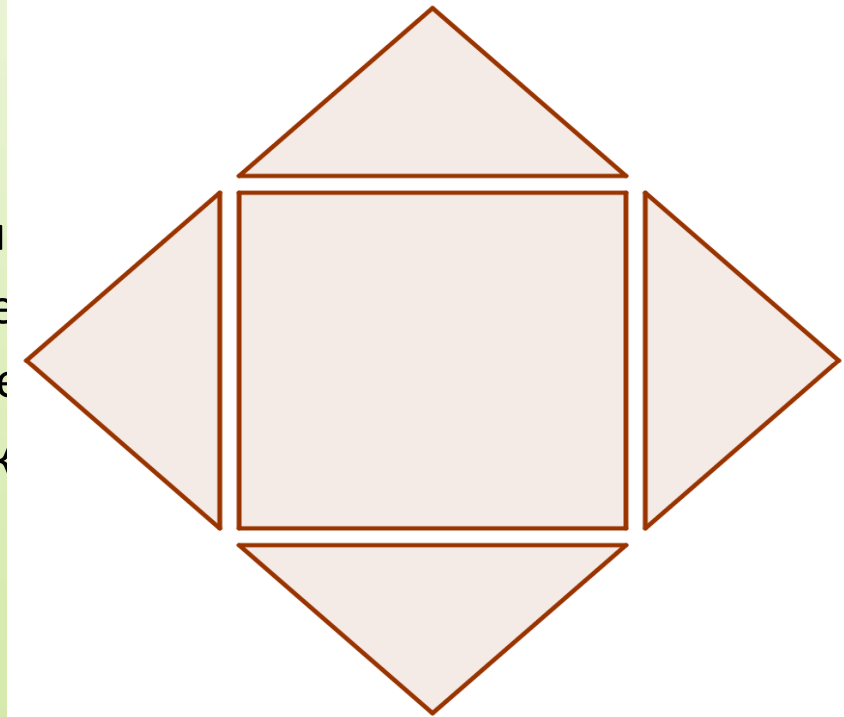
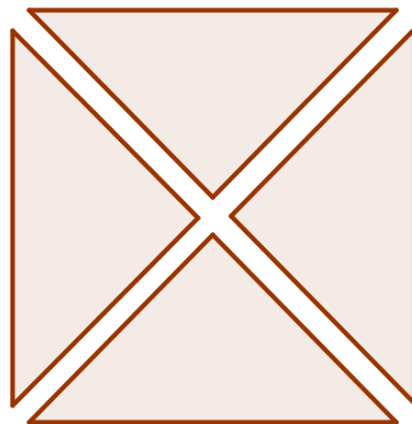
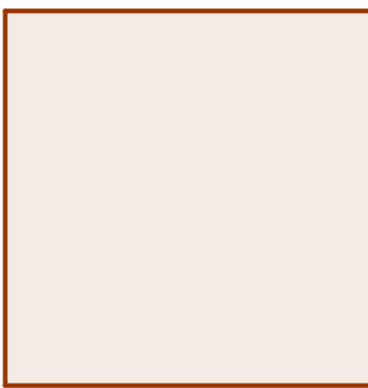
**Пример:** Којом цифром се завршава производ  $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 7$  који је сачињен од 100 чинилаца?

- Знање ученика је неопходно, али није гаранција за

4. Флексибилност

- Избежавати стереотипна решења и укључивати обилу
- Промена
- Спречава

**Пример:**



ачине.  
са другим

# МАТЕМАТИЧКО МИШЉЕЊЕ

## 5. Флуентност (гипкост)

- Развијање већег броја идеја на истом математичком садржају. Притом, битан је што већи број идеја (квантитет).

**Пример:** Треба направити железничку композицију са три путничка и два теретна вагона. На колико се начина може начинити композиција, ако се зна да теретни вагони не смеју бити један крај другог?

6. Редефиниција – способност да се подаци дати у задатку употребе на нов, другачији начин, тј. осмисле језичком формом која је ближа и разумљивија и омогућава лакше решавање задатка.

7. Елаборација – способност да се идеје дате у задатку разлажу, развијају и допуњавају новим идејама, чиме се постепено приближавамо решењу.

**Пример:** Које оцене из метаматике су добиле Анка, Бранка и Данка, ако Анка нема 3, Данка нема 3 и нема 5, а у одељењу нема јединица и двојки и ако се зна да су све три добиле различите оцене?

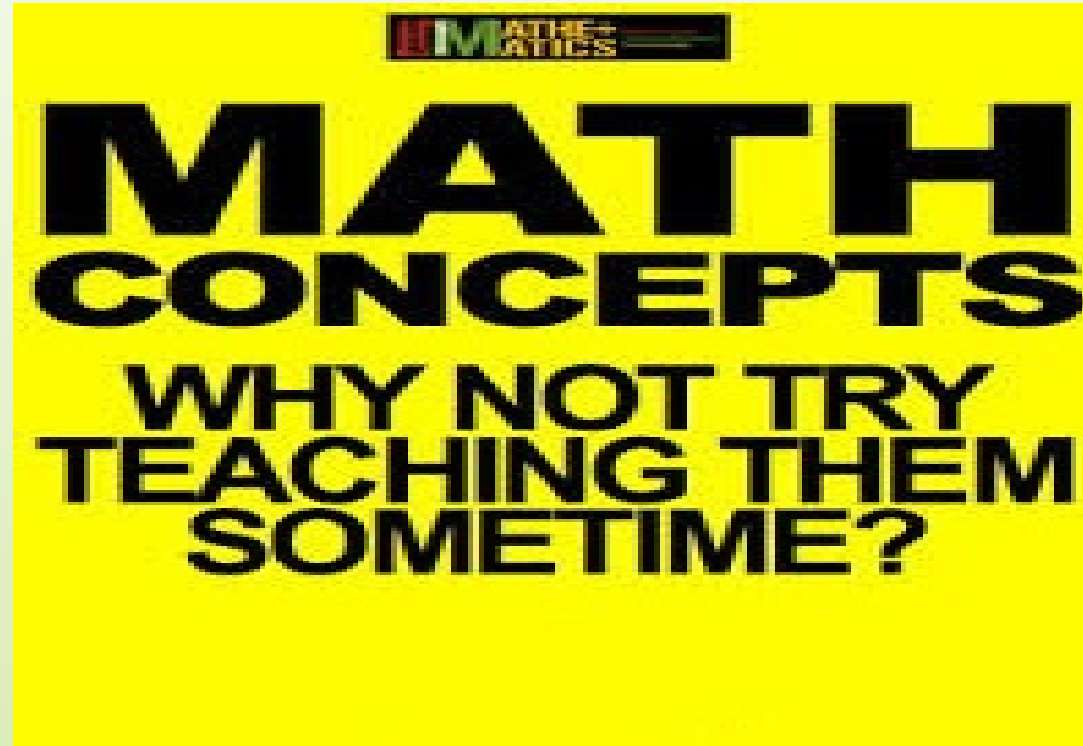
# МАТЕМАТИЧКО МИШЉЕЊЕ

Смернице:

- Не инсистирати на томе да ученици обавезно решавају задатке по одређеном правилу или редоследу, јер се тиме лако ствара навика механичког, шаблонског решавања задатака – дресура.
- Упућивати ученике на систематичан приступ математичким садржајима уз развијање и неговање свих аспеката математичког мишљења.

# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

Обим, садржај, дефиниција и класификација





# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

Обим, садржај, дефиниција и класификација

- Трајност математичких знања се постиже само уз усмерени развој мишљења.
  - Један од главних задатака савремене наставе математике је развој мишљења ученика, посебно стваралачког мишљења.
- Облици мишљења:
  - Разумевање – појмови,
  - Расуђивање – судови,
  - Закључивање – закључци, логички судови.
- Пример 1:
  - „Права која пролази кроз средиште дужи и нормална је на њу зове се симетрала дужи.“ – појам дат дефиницијом.
  - „Кроз тачку ван дате праве може се поставити јединствена права паралелна датој правој.“ – суд (аксиома еуклидске геометрије).
  - „Ако је  $a \leq b$  и  $b \leq c$ , тада је и  $a \leq c$ .“ – закључак.

# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

Обим, садржај, дефиниција и класификација

- Појам (П) је облик мишљења којим се изражавају битна својства неког објекта (стварног или апстрактног) или релације.
- Формирање појма у спознаји човека је неодвојиво од његовог изражавања речима, записом или симболом.
  - Запажање објеката и конкретних својстава,
  - Формирање представе о појму – уочавање општих и заједничких особина свих елемената посматраног скупа објеката,
  - Формирање и усвајање појма – издвајање битних општих својстава објекта.
- Симболика и реч при изражавању датог појма морају бити једнозначни.
  - Одступање може довести до нејсаноћа и неразумевања (нпр. права  $AB$ , дуж  $AB$ , растојање  $AB$ )
- Синоними (нпр. квадрат – ...) богатство језика, али и јасније и тачније одређење појма.

# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

## Обим, садржај, дефиниција и класификација

- Садржај појма (СП) је скуп свих битних обележја свих објеката или релација на које се може применити језички израз појма П.
- Обим појма (ОП) је скуп свих објеката или релација на које се може применити језички израз појма П.
- Потпуна узајамна одређеност СП и ОП (обрнута зависност).
- Пример2:
  - П – паралелне праве, СП – леже у истој равни, на једнаком су растојању, немају заједничких тачака или се подударају, ОП – сви парови паралелних правих.
  - П – паралелограм, СП – наспрамне странице паралелне и подударне, наспрамни углови подударни, суседни углови суплементни, дијагонале се полове, ..., ОП – ромбоид, ромб, правоугаоник, квадрат.
- Ако је  $ОП_1 \subset ОП_2$  , онда кажемо да је појам  $П_2$  род појма  $П_1$  , а појам  $П_1$  врста појма  $П_2$  .

# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

Обим, садржај, дефиниција и класификација

- Пример 3:
  - Правоугаоник и ромб имају исте родове – паралелограм, трапез, четвороугао, многоугао, ...
  - Родови појма „природан број“ су цео ненегативан број, цео број, рационалан број, реалан број, комплексан број.
- Врсте појмова
  - Основни – не дефинишу се – тачка, права, раван, простор, скуп, ...
  - Изведени – морају се јасно и прецизно дефинисати помоћу основних или других већ дефинисаних појмова.
- Дефиниција појма је набрајање потребних и довољних обележја појма повезаних логичком реченицом или симболичким записом.
  - У дефиницији не сме бити сувишних речи нити недостатака који би довели до недоумица или неразумевања појма – минималност садржаја.
  - ППП – природност, прикладност, применљивост дефиниције.
  - Све дефиниције истог појма морају бити међусобно еквивалентне.

# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

Обим, садржај, дефиниција и класификација

- Начини дефинисања математичких појмова:
  - Помоћу најближег рода и разлике врсте:
    - Паралелограм чији је један унутрашњи угао прав зове се правоугаоник.
  - Набрајањем битних обележја појма:
    - Две равни зовемо паралелним равнима ако оне немају заједничке тачке.
  - Индуктивна дефиниција:
    - Низ чији је сваки члан једнак збиру претходног члана и константе зове се аритметички низ.
  - Генетичка дефиниција (описује начин настанка појма):
    - Део равни који опише полуправа ротацијом око свог почетка зове се угао.
  - Конвенционална дефиниција (договор):
    - Скуп који нема ни један елемент назива се празан скуп.

# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

Обим, садржај, дефиниција и класификација

- Правила дефинисања појмова:
  - Дефиниција мора бити примерена дефинисаном појму, ни преуска, ни преопширна, мора разоткривати суштину појма.
  - Дефиниција мора бити прегледна и сажета.
  - Дефиниција мора бити савремена.
  - Дефиниција не сме бити изражена сликовитим или двосмисленим језиком.
  - Дефиниција не сме бити циркуларна.
  - Дефиниција не сме бити негативна, уколико може да буде позитивна.
  - Опсег појма који се дефинише не сме бити празан скуп.

# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

Обим, садржај, дефиниција и класификација

- Примери:

4. „За две праве кажемо да су паралелне ако се не секу и не поклапају се.“

- Преопширна дефиниција, изостављено битно обележје „леже у истој равни“.

5. „Паралелограм је четвороугао који има два пара наспрамних паралелних страница једнаких дужина.“

- Својства „наспрамне странице су паралелне“ и „наспрамне странице су једнаких дужина“ су еквивалентна, могу се извести једно из другог.

6. „Праве које захватају прав угао су узајамно нормалне праве.“ „Угао чији су краци узајамно нормални зове се прав угао.“

- Дефиниција је циркуларна

7. „Реалан број који није рационалан назива се ирационалан број.“

- Негативна дефиниција, а може се исказати позитивном реченицом (бесконечан непериодичан број).

8. „Троугао који има два права унутрашња угла назива се двоправоугли троугао.“

- Опсег појма у еуклидској геометрији је празан скуп. (У сферној геометрији није!!!)

9. Дефиниције у речницима, приручницима, енциклопедијама...

- Препоручујемо слушаоцу да попуни за домаћи задатак!

# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

Обим, садржај, дефиниција и класификација

Завршне напомене:

- Процес формирања појмова у настави математике не мора (понекад и не може) бити прецизан и строг као исти процес у науци, што зависи од узраста и предзнања ученика. Поједностављења су дозвољена све док се не нарушава принцип научности у настави.
- Нивои мишљења ученика
  - На најнижем нивоу ученик геометријске ликове (нпр. ромб, трапез, правоугаоник) разликује по облику и не уочава везу међу њима.
  - Виши ниво је дефинисање тих ликова, чиме се завршава процес формирања одговарајућих појмова (у овој фази ученик постаје свестан да су ромб и правоугаоник трапези).



Етапе наставног процеса	Психолишке етапе формирања појма	Конкретно исказивање датог појма речима
I корак: Практични примери за правоугаоник	Перцептивно и препознавање по сећању	Прозорска стакла, површина стола
II корак: Истицање битних и небитних особина појма, увођење термина којим се означава дати појам	Прелазак са перцепције на представу	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Различити су по величини</li> <li>2. Објекти су од различитог материјала</li> <li>3. У различитим положајима</li> <li>4. Сви су четвороуглови</li> <li>5. Сви углови су им прави</li> <li>6. Уводи се термин правоугаоник</li> </ol>
III корак: Одвајање битних од небитних особина	Прелаз од представе ка појму	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Правоугаоник је четвороугао</li> <li>2. Сви углови правоугаоника су прави</li> <li>3. Припрема за дефинисање</li> </ol>
IV корак: Илустрација појма	Формирање појма	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Лист свеске</li> <li>2. Неке слике у уџбенику</li> <li>3. Странице квадра</li> </ol>
V корак: Могуће дефинисање појма	Усвајање појма	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Правоугаоник је: <ol style="list-style-type: none"> <li>а) четвороугао</li> <li>б) сви углови су прави</li> </ol> </li> <li>2. Дефиниција: Правоугаоник је четвороугао чији су сви углови прави</li> </ol>

# МИСАОНЕ ОПЕРАЦИЈЕ

- Стицање знања и формирање умења ученика је резултат низа мисаоних активности: анализе, синтезе, упоређивања, апстракције, генерализације.
  - Развијање способности ученика за примену ових мисаоних операција значајно је како за усвајање математичких садржаја, тако и за интелектуални развој деце.
- 1. **Анализа** – мисаоно разлагање целионе на њене саставне делове ради упознавања њених делова и њихових међусобних односа
  - Има широку примену у свим фазама наставног рада.
  - Облици:
    - Анализа типа “филтер” при којој се појам рашчлањује на саставне делове без одређеног унапред утврђеног реда.
    - Анализа преко синтезе - успостављање веза и односа међу особинама изучаваног објекта.

**Пример:** Анализом квадрата одваја се страница као његов елемент. Анализира се релација између страница и утврђује да су све странице једнаке међу собом. На основу тога, успоставља се веза која је значајна за извођење формула за обим и површини квадрата:

- квадрат је многоугао са четири странице – четвороугао,
- све четири странице су међусобно једнаке,
- све странице квадрата могу се означити једним истим словом –  $a$ ,
- обим квадрата је збир дужина свих његових страница и  $O = a + a + a + a$ , тј.  $O = 4a$ .

# МИСАОНЕ ОПЕРАЦИЈЕ

**2. Синтеза** – мисаона операција сједињавања изучених елемената математичког појма, процеса, појаве у једну интегралну целину.

**Пример:** Одредити број који је збир петсто хиљада, деведесет хиљада, две хиљаде, три стотине, седамдесет и шест.

- Синтетички приступ доприноси да се, осим схватања саставних делова као интегралне целине, сагледају и њихове битне особине и релације међу њима.
- Анализа и синтеза су неодвојиве и образују аналитичко-синтетички приступ, који има широку примену, нарочито при решавању сложених текстуалних задатака.

**Пример:** Збир четири броја је 1000. Први број је 150, други је два пута већи од њега, а трећи је збир првог и другог. Одредити четврти број.

# МИСАОНЕ ОПЕРАЦИЈЕ

## 3. Упоредивање

- Мисаона операција одређивања сродности и различитости проучаваних објеката.
- Упоредивањем математичких објеката утврђујемо:
  - Колико је нови појам сродан са раније уведеним појмом,
  - Колико се нови појам разликује од раније уведених појмова,
  - Које су везе између елемената новог и раније уведених појмова.

Пример: Упоредивањем квадрата по питању углова и страница са осталим четвороугловима и посебно са правоугаонцима, ученици могу да дефинишу појам квадрата као:

- четвороугао чији су сви углови прави и све странице међусобно једнаке,
  - правоугаоник са једнаким страницама.
- Правила упоредивања:
    1. Упоредјују се само математички појмови између којих постоји веза – има смисла упоредивати истородне величине.
    2. Изводи се плански – јасно се издвајају оне особине које се упоредјују.
    3. Упоредивање истородних величина треба да буде целовито – да се изведе до краја.

# МИСАОНЕ ОПЕРАЦИЈЕ

## 4. Апстракција

- Издајање (задржавање) битних и изостављање небитних особина – задржавају се само оне које чине садржај математичког појма.

**Пример:** При обради комутативности сабирања природних бројева одбацујемо број цифара, однос по величини и редослед сабирака; задржавамо податак да се збир не мења.

- Успешност апстрактног схватања зависи од тога колико су успешно спроведене анализа, синтеза и упоређивање, на којима се заснива апстракција.

# МИСАОНЕ ОПЕРАЦИЈЕ

## 5. Генерализација

- Уопштавање на основу сазнања из низа појединих случајева.
- Повезана је са низом мисаоних операција:
  - Анализирање појединачних случајева,
  - Идентификовање и издвајање релевантних особина појма који се проучава,
  - Синтеза заједничких битних особина у једну целину,
  - Дефинисање изведене генерализације.

Пример:           Размотрити генерализацију формуле за површину правоугаоника.

- 6. **Идентификација** – мисаоно поистовећивање свих посматраних објеката са задржаним карактеристичним својствима.
- 7. **Конкретизација** – усвајање сложенијих апстрактних структура уз посматрање и манипулисање конкретним моделима.
- 8. **Специјализација** – преношење својстава која важе за шири скуп појмова на неки његов подскуп.

# МАТЕМАТИЧКО ЗАКЉУЧИВАЊЕ

- Математичко закључивање – извођење закључака – мисаона операција којом се на основу неколико тврђења добија ново тврђење.
  - Полазно тврђење – претпоставка, премиса.
  - Новодобијено тврђење – закључак, последица.
- Математичка тврђења могу бити:
  - а) појединачна – односе се само на један математички појам.

**Пример:** Број 5 је прост. Број 13 је напаран.

б) партикуларна – односе се на већи број елемената датог скупа математичких појмова. Препознају се по употреби квантификатора  $\exists$  - неки, постоји.

**Пример:** Неки парни природни бројеви су мањи од 15.

в) општа – односе се на све елементе датог скупа објеката или математичких појмова. Препознају се по употреби квантификатора  $\forall$  - сваки, за сваки, било који..

**Пример:** Сваки паран број је дељив са 2.

У сваком троуглу два његова угла су оштра.

# МАТЕМАТИЧКО ЗАКЉУЧИВАЊЕ

## 1. Индукција (лат. Inductio – побуђивање) – извођење закључака од појединачног ка општем

**Пример:** Знајући да су супротне странице правоугаоника, ромба и ромбоида међусобно једнаке и да су сви они паралелограми, можемо закључити да су супротне странице паралелограма међусобно једнаке.

- Код непотпуне индукције закључак се изводи на основу разматрања само неколико елемената скупа.

**Пример:** На основу неколико примера са конкретним бројевима, можемо извести закључак о комутативности сабирања природних бројева.

- Истинитост општег закључка изведеног непотпуном индукцијом није загарантована. Такве закључке треба третирати као хипотезе.

**Пример:** Проверити следећи закључак: „Производ два природна броја је већи од својих чинилаца.“.

- Потпуном индукцијом закључак се изводи на основу сагледавања свих елемената датог скупа. Правилном применом потпуне индукције добијају се истинити закључци.

**Пример:** Знајући да правоугли троугао има 2 оштра угла, тупоугли троугао има 2 оштра угла и ошторугли троугао има 3 оштра угла, можемо извести (тачан) закључак да су у сваком троуглу два угла оштра.



# МАТЕМАТИЧКО ЗАКЉУЧИВАЊЕ

2. **Дедукција** (лат. deductio - смањење) – извођење закључака од општег ка посебном.

- Уопштени поступак при дедуктивном занимању научних истина и појмова:
  - Издајање неколико основних (полазних) појмова,
  - Дефинисање свих других појмова помоћу основних или других већ дефинисаних појмова,
  - Одређивање и формулисање истина у виду аксиома,
  - Извођење и доказивање осталих тврђења из аксиома или других већ доказаних тврђења.

**Пример:**

- 1)  $(\forall a, b, c \in \mathbb{N}), (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  – опште тврђење,
- 2)  $5, 8, 13 \in \mathbb{N}$  – партикуларно тврђење,
- 3)  $(5+8) \cdot 13 = 5 \cdot 13 + 8 \cdot 13$  – изведено појединачно тврђење.

**Пример:**

- 1) Бројеви чији је збир цифара дељив са 3, дељиви су са 3.
- 2) Збир цифара броја 8001108 је дељив са 3.
- 3) Број 8001108 је дељив са 3.

- Дедукција и индукција се примењују у оквиру комбинованог дедуктивно-индуктивног приступа.

# МАТЕМАТИЧКО ЗАКЉУЧИВАЊЕ

3. **Аналогија** (грч. – сродност, сличност) – закључивање о сличности објеката по некој особини на основу већ познате сличности тих објеката по неким другин особинама.

- Шематски приказ закључивања:

А има вредности  $a, b, c, \dots, x, y$ ;

В има вредности  $a, b, c, \dots, x$ ;

Вероватно је да ће и В имати вредност  $y$ .

**Пример:** Размотрити сличне особине квадрата и правоугаоника и одговарајуће закључке по питању описане кружнице.

- Закључивање по аналогији је исправно само ако се у обзир узимају суштинска (битна) својства.
- Закључивање по аналогији може довести до нетачних резултата ако се особине коначних скупова примене на бесконачне скупове.

**Пример:** Размотрити могуће закључке о вредности бесконачног збира

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + \dots$$