Разредна настава – прва година

Назив предмета: Математика 1

Предметни професор: Проф. др Љиљана Пауновић

Консултације: четвртак 10:30 – 12:45

петак 10:30 – 12:45

АЛГЕБАРСКЕ СТРУКТУРЕ

Дефиниција: Нека је G непразан скуп. Свако пресликавање $f : G \times G \to G$ назива се бинарна операција у скупу G.

- Ако се уређени пар (a,b) помоћу f пресликава у c онда се то бележи са $f(a,b) = c$ или $afb = c$. У алгебри се уместо f користе ознаке за операције као што су : $+, -, :, \circ, \div, \cdot, *, \Delta$.

Дефиниција: Групоид је најједноставнији пример алгебарске структуре. Нека је G непразан скуп и „$\circ$" бинарна операција у G. **Групоид је** уређени пар $(G,\circ)$ за који важи затвореност тј. за свака два елемента a и b скупа G важи да је и $a \circ b \in G$.

Пример: Уређени парови $(N,+), (N,\cdot)$ су групоиди. Овде су посматране операције сабирања и множења у скупу природних бројева. Како знамо да је збир као и производ два произвољна природна броја природан број (операције сабирања и множења су затворене операције у скупу природних бројева), на основу тога закључујемо да су $(N,+), (N,\cdot)$ групоиди. Операције одузимање и дељење нису затворене у скупу природних бројева (разлика било која два природна броја, као и количник не мора да буде природан број нпр. $3 - 6 = -3 \notin N$), што значи да уређени парови $(N,-), (N,:)$ нису групоиди. Операције одузимање и дељење кажемо да су делимично дефинисане у скупу природних бројева.

Дефиниција: Нека је G непразан скуп. За операцију „$\circ$" у скупу G кажемо да је:

- **Комутативна** ако важи $a \circ b = b \circ a \quad (\forall a, b \in G)$
- **Асоцијативна** ако важи $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad (\forall a, b, c \in G)$

Дефиниција: Нека су на непразном скупу G дефинисане две операције „$\circ$" и „$*$". Ако је $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$ онда кажемо да је операција „$\circ$" **лево дистрибутивна** према операцији „$*$", а **десно дистрибутивна** ако важи $(a * b) \circ c = (a * b) \circ (a * c)$ за $(\forall a, b, c \in G)$

Дефиниција: Групоид $(G,\circ)$ је **асоцијативни групоид** или **полугрупа** или **семи група** ако је „$\circ$" асоцијативна операција.

Дефиниција: За елемент $e \in G$ кажемо да је неутрални елемент групоида $(G,\circ)$ ако важи $a \circ e = e \circ a = a, \quad \forall a \in G.$

Теорема: У групоиду $(G,\circ)$ постоји највише један неутрални елемент.

Дефиниција: Полугрупа $(G,\circ)$ која има неутрални елемент назива се **моноид**.

Дефиниција: Нека је $(G,\circ)$ моноид. За елемент a^{-1} кажемо да је инверзни елемент елемента a ако важи $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Дефиниција: Уређени пар $(G,\circ)$ је **група** ако су задовољене аксиоме затворености, асоцијативности, ако има неутрални и инверзни елемент.

Дефиниција: Група је моноид у којем сваки елемент има инверз.

Дефиниција: Група $(G,\circ)$ зове се **Абелова** или **комутативна група** ако је операција „$\circ$" комутативна.

Дефиниција: Уређена тројка $(G,+,\circ)$ назива се **прстен** ако је:

1) $(G,+)$ комутативна група
2) $(G,\circ)$ полугрупа
3) „+" дистрибутивна у односу на „$\circ$"

ЗАДАЦИ

1. Нека је к фиксиран природан број већи од 1. Ако су „*" и „$\circ$" бинарне операције у скупу N одређене са $m * n = m + kn$ и $m \circ n = kmn$. Испитати да ли су ове операције комутативне, асоцијативне, а затим испитати да ли је операција „$\circ$" дистрибутивна према операцији „*".

Решење:

<u>Комутативност операције</u> „*"

$$m * n = n * m$$

$m * n = m + kn$

$n*m=n+km$ Закључујемо да операција „*“ није комутативна.

$m*n=n*m$ комутативни закон

Решава се лева страна једнакости $m*n=m+kn$

Решава се десна страна једнакости $n*m=n+km$

Упореде се резултати леве и десне стране једнакости и закључује да комутативност не важи.

Комутативност операције „$\circ$“

$$m\circ n=n\circ m$$

$m\circ n=kmn$
$n\circ m=knm$ Очигледно је да комутативни закон важи.

Асоцијативност операције „*“

$$(m*n)*p=m*(n*p)$$

$(m*n)*p=(m*n)+kp=m+kn+kp$

$m*(n*p)=m+k(n*p)=m+k(n+kp)=m+kn+k^2p$ Асоцијативност не важи.

Асоцијативност операције „$\circ$“

$$(m\circ n)\circ p=m\circ(n\circ p)$$

$(m\circ n)\circ p=k(m\circ n)p=k(kmn)p=k^2mnp$
$m\circ(n\circ p)=km(n\circ p)=km(knp)=k^2mnp$ Асоцијативност важи.

Дистрибутивност операције „$\circ$“ према операцији „*“

$$m\circ(n*p)=(m\circ n)*(m\circ p)$$

$m\circ(n*p)=km(n*p)=km(n+kp)=kmn+k^2mp$

$(m\circ n)*(m\circ p)=(m\circ n)+k(m\circ p)=kmn+k(kmp)=kmn+k^2mp$ Важи дистрибутивни закон.

2. Нека је G скуп реалних бројева, и нека је операција „$\circ$" дефинисана са

$$a \circ b = \frac{1}{2}(a+b) \quad \text{за } (\forall a, b \in G).$$

Испитати да ли је алгебарска структура $(G,\circ)$ полугрупа.

Решење: Да би алгебарска структура била полугрупа потребно је да важи затвореност и асоцијативност.

1) Затвореност
Нека су $(a, b \in G)$, како је и $a \circ b \in G$ то значи да је затвореност задовољена.

2) Асоцијативност

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

$$(a \circ b) \circ c = \frac{1}{2}((a \circ b) + c) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a+b) + c\right) = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c$$

$$a \circ (b \circ c) = \frac{1}{2}(a + (b \circ c)) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{2}(b+c)\right) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c$$

Како резултати леве и десне стране једнакости нису једнаки то значи да асоцијативност не важи.

Како важи затвореност то значи да је уређени пар $(G,\circ)$ групоид, како смо доказали да асоцијативност не важи то значи да $(G,\circ)$ није полугрупа.

3. У скупу реалних бројева дефинисана је бинарна операција „*" на следећи начин:

$$a * b = ab + 2a + 2b + 2$$

Испитати да ли је $(R,*)$ група. Да ли је $(R,*)$ Абелова група?

Решење:

Затвореност
Нека су $a, b \in R$ онда је и $(a * b) \in R$ што значи да важи затвореност. Ако важи затвореност онда је $(R,*)$ групоид.

Асоцијативност

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

$$(a*b)*c = (a*b)c + 2(a*b) + 2c + 2 = (ab + 2a + 2b + 2)c + 2(ab + 2a + 2b + 2) + 2c + 2$$
$$= abc + 2ac + 2bc + 2c + 2ab + 4a + 4b + 4 + 2c + 2$$
$$= abc + 2ac + 2bc + 2ab + 4a + 4b + 4c + 6$$

$$a*(b*c) = a(b*c) + 2a + 2(b*c) + 2 = a(bc + 2b + 2c + 2) + 2a + 2(bc + 2b + 2c + 2) + 2$$
$$= abc + 2ab + 2ac + 2a + 2a + 2bc + 4b + 4c + 4 + 2$$
$$= abc + 2ab + 2ac + 2bc + 4a + 4b + 4c + 6$$

Асоцијативност важи.

Ако важи затвореност и асоцијативност онда је $(R,*)$ полугрупа (семигрупа).

<u>Неутрални елемент</u>

$a*e = e*a = a$ $\qquad$ e је неутрални елемент

$$a*e = a$$
$$ae + 2a + 2e + 2 = a$$
$$ae + 2e = a - 2a - 2$$
$$e(a+2) = -a - 2$$
$$e(a+2) = -(a+2)$$
$$e = -\frac{a+2}{a+2}$$
$$e = -1$$

Десни неутрални елемент.

$a*e = e*a = a$

Леви неутрални елемент

Десни неутрални елемент

$$e*a = a$$
$$ea + 2e + 2a + 2 = a$$
$$ea + 2e = a - 2a - 2$$
$$e(a+2) = -a - 2$$
$$e(a+2) = -(a+2)$$
$$e = -\frac{a+2}{a+2}$$
$$e = -1$$

Леви неутрални елемент.

Да би неутрални елемент постојао потребно је да леви неутрални елемент има исту вредност као и десни неутрални елемент.

Како смо добили исте вредности за леви и десни неутрални елемент то значи да неутрални елемент постоји и $e=-1$.

Како вази затвореност, асоцијативност и постоји неутрални елемент то значи да је $(R,*)$ моноид.

Инверзни елемент

$a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$ $\quad$ a^{-1} је инверзни елемент елемента a

e је неутрални елемент који смо већ одредили

$$a*a^{-1}=e$$
$$a*a^{-1}=-1$$
$$aa^{-1}+2a+2a^{-1}+2=-1$$
$$aa^{-1}+2a^{-1}=-1-2-2a$$
$$a^{-1}(a+2)=-3-2a$$
$$a^{-1}=\frac{-2a-3}{a+2}$$
$$a^{-1}=-\frac{2a+3}{a+2}$$

Инверзни елемент постоји.

Ако је задовољена затвореност, асоцијативност, постоји неутрални и инверзни елемент онда је $(R,*)$ група.

Комутативност

$$a*b=b*a$$

$$\begin{aligned}a*b&=ab+2a+2b+2\\ b*a&=ba+2b+2a+2\end{aligned}$$ Важи комутативност.

Ако важи затвореност, асоцијативност, неутрални, инверзни елемент и ако важи комутативност тада је $(R,*)$ комутативна или Абелова група.

4. Нека је групоид $(G,\cdot)$ коначан и дат следећом Келијевом таблицом. Испитати да ли је $(G,\cdot)$ комутативна група.

$\cdot$	***a***	***b***	***c***
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Решење:

Затвореност

Затвореност свакако важи зато што је у задатку дато да је $(G,\cdot)$ групоид (код групоида је задовољена затвореност).
Када се из Келијеве таблице испитује затвореност потребно је да у таблици фигуришу само елементи који су у заглављу таблице (a,b,c).

$\cdot$	***a***	***b***	***c***
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Заглавље таблице је означено црвеном бојом.

Асоцијативност

$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot (b\cdot c)$

$b\cdot c = a\cdot a$

$a = a$

$\cdot$	***a***	***b***	***c***
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Асоцијативност важи.

Неутрални елемент

.	***a***	***b***	***c***
a	*a*	*b*	*c*
b	*b*	*c*	*a*
c	*c*	*a*	*b*

Неутрални елемент се тражи у пресеку врсте и колоне у којима је распоред елемената исти као у заглављу таблице. Овде се види да је елемент *a* у пресеку што значи да је он неутрални елемент.

Инверзни елемент

За елемент *a* његов инверз је *a*

За елемент *b* његов инверз је *c*

За елемент *c* његов инверз је *b*.

Комутативност

.	***a***	***b***	***c***
a	*a*	*b*	*c*
b	*b*	*c*	*a*
c	*c*	*a*	*b*

Главна дијагонала је представљена стрелицом.

Ако је Келијева таблица симетрична у односу на главну дијагоналу онда важи комутативни закон. У овом случају комутативност је задовољена.

Како важи затвореност, асоцијативност, неутрални, инверзни елемент и комутативни закон то значи да је $(G,\cdot)$ Абелова или комутативна група.

ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ

Принцип математичке индукције

<u>Теорема</u>: Ако је тврђење које у својој формулацији садржи природан број n тачно за $n=1$ и ако из претпоставке да је тачно за $n=k$ следи да је тачно и за $n=k+1$, онда је то тврђење тачно за све природне бројеве.

ЗАДАЦИ

1. Методом математичке индукције доказати да за све природне бројеве важи:

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

Решење:

Метод математичке индукције састоји се из следећег:

1) **Доказује се да тврђење важи за** $n=1$
2) **Претпоставља се да тврђење важи за** $n=k$
3) **Доказује се да тврђење важи за** $n=k+1$**.**

1) Докажимо да важи за $n=1$

$$2\cdot 1-1=1^2$$
$$2-1=1$$
$$1=1$$

У тврђењу које је дато у задатку узимамо да је $n=1$

2) Претпоставка да тврђење важи за $n=k$

$$1+3+5+...+(2k-1)=k^2 \qquad (*)$$

У тврђењу које је дато у задатку узимамо да је $n=k$ и претпостављамо да је (*) тачна

3) Доказујемо да тврђење важи за $n=k+1$

Када у тврђење које је дато у задатку заменимо $n = k + 1$ добија се

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$$
$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 2 - 1) = (k + 1)^2$$
$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Потребно је доказати да ова једнакост заиста важи

На основу (*)

$$k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

$$k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$
$$(k + 1)^2 = (k + 1)^2$$

Знамо да је $(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$ квадрат бинома.

2. Методом математичке индукције доказати да за све природне бројеве важи:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Решење:

1) За $n = 1$

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2}$$
$$1 = 1$$

2) Претпоставимо да важи за $n = k$

$$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k + 1)}{2} \qquad (*)$$

3) Доказујемо да важи за $n = k + 1$ тј. потребно је доказати да важи:

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 1 + 1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

$$\frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$
$$\frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

На основу (*) је $1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k + 1)}{2}$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

3. Методом математичке индукције доказати да за све природне бројеве важи:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Решење:

1) За $n=1$ имамо

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

$$1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$$

$$1 = 1$$

2) Претпостављамо да важи за $n=k$ тј. нека је

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad (*) \qquad \text{(индуктивна претпоставка)}$$

3) Користећи индуктивну претпоставку доказујемо тачност за $n=k+1$ тј. доказујемо

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

На основу (*)

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)[2k^2+k+6k+6]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Јер је

$$2k^2+7k+6=0$$

$$k_{1/2}=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 2\cdot 6}}{2\cdot 2}$$

$$k_{1/2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{4}$$

$$k_{1/2}=\frac{-7\pm 1}{4}$$

$$k_1=\frac{-7+1}{4}=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}$$

$$k_2=\frac{-7-1}{4}=\frac{-8}{4}=-2$$

Квадратна једначина облика $ax^2+bx+c=0$ може се представити у облику
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

где су x_1 и x_2 корени квадратне једначине.

$$2k^2+7k+6=2\left(k-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)(k-(-2))=2\left(k+\frac{3}{2}\right)(k+2)=(2k+3)(k+2)$$

4. Применом математичке индукције доказати да је
7^n-1 дељиво са 6.

Решење:

1) За $n=1$

$7^1-1=7-1=6$ дељиво са 6

2) Претпоставимо да важи за $n=k$
7^k-1 дељиво са 6 (*) (индуктивна претпоставка)

3) Докажимо да важи за $n=k+1$
$$7^{k+1}-1=7^k\cdot 7^1-1=6\cdot 7^k+7^k-1$$

Дељиво са 6 Дељиво са 6 на основу (*)

На основу правила степеновања
$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ важи да је $7^k\cdot 7^1=7^{k+1}$

$6\cdot 7^k+7^k=7\cdot 7^k=7^1\cdot 7^k=7^{k+1}$

5. Применом математичке индукције доказати да је

$$4^n+15n-1 \quad \text{дељиво са 3.}$$

Решење:

1) За $n=1$ имамо да је

$$4^1+15\cdot 1-1=4+15-1=18 \quad \text{дељиво је са 3}$$

2) Претпоставимо да важи за $n=k$

$$4^k+15k-1 \quad \text{претпоставка да је дељиво са 3} \quad (*)$$

3) Докажимо да важи за $n=k+1$ тј. докажимо да је

$$4^{k+1}+15(k+1)-1 \quad \text{дељиво са 3}$$

Како је

$$4^{k+1}+15(k+1)-1=4^k\cdot 4^1+15k+15-1=4^k+3\cdot 4^k+15k+15-1=$$

$$4^k+15k-1+3\cdot 4^k+15=4^k+15k-1+3\left(4^k+5\right)$$

Дељиво са 3 на основу (*)

Дељиво са 3 јер сваки број помножен са 3 је и дељив са 3

$$4^{k+1}=4^k\cdot 4^1=4\cdot 4^k=1\cdot 4^k+3\cdot 4^k$$

На пример:

$$4\cdot 4^k=3\cdot 4^k+4^k \quad \text{или}$$

$$4\cdot 4^k=2\cdot 4^k+2\cdot 4^k$$

6. Доказати да је збир кубова три узастопна природна броја дељив са 9.

Решење:

n,   *n+1*,   *n+2*   три узастопна природна броја

Потребно је доказати да је $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ дељиво са 9.

1) За $n=1$ је

   $1^3+(1+1)^3+(1+2)^3=1+8+27=36$ дељиво је са 9.

2) Претпоставимо да важи за $n=k$

   $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$ претпоставка да је дељиво са 9 (*)

3) Докажимо да је важи за $n=k+1$ тј. потребно је доказати да је

$(k+1)^3+(k+1+1)^3+(k+2+1)^3=(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$ дељиво са 9.

Имамо да је

$$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+3k^2\cdot 3+3k\cdot 3^2+3^3=$$
$$(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9k^2+27k+27=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9(k^2+3k+3)$$

Дељиво са 9 на основу претпоставке (*)

Дељиво са 9 јер било који број помножен са 9 је и дељив са 9

На основу формуле

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Добили смо да је

$(k+3)^3=k^3+3k^2\cdot 3+3k\cdot 3^2+3^3$

НАЈВЕЋИ ЗАЈЕДНИЧКИ ДЕЛИЛАЦ И НАЈМАЊИ ЗАЈЕДНИЧКИ САДРЖАЛАЦ

Теорема (Основна теорема аритметике): Сваки сложен природан број може се написати као производ простих бројева:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$

- Неки од чинилаца могу бити једнаки, ако те чиниоце групишемо онда сваки природан број можемо представити у облику:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$$

Представљање бројева на овај начин назива се **канонично**.

Пример: $14 = 2 \cdot 7$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

Дефиниција: Највећи заједнички делилац неколико бројева је највећи број којим су дељиви сви дати бројеви.

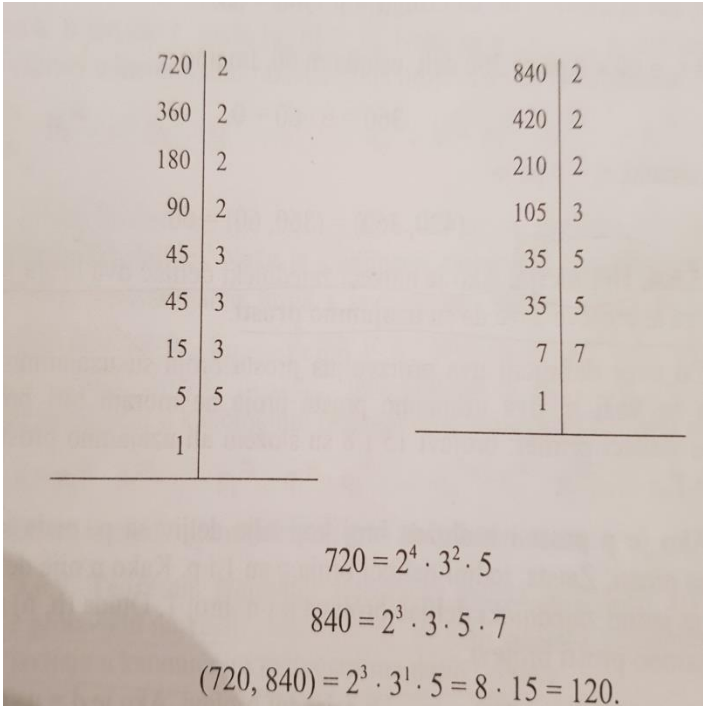
- Највећи заједнички делилац за неколико бројева *a, b, c,...* означава се са $(a, b, c, \ldots)$ или једноставно са *NZD (a,b,c,...)*.

Теорема: Највећи заједнички делилац два или више бројева једнак је производу најмањих степена заједничких простих чинилаца који се јављају у каноничним разлагањима датих бројева.

У пракси тражење највећег заједничког делиоца два или више бројева састоји се из два корака:

1. Одреди се канонично разлагење датих бројева.
2. Тражи се производ само заједничких простих чинилаца који се јављају у овим разлагањима на најмањи могући степен.

Пример: Наћи највећи заједнички делилац за бројеве 720 и 840.



720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
45	3
15	3
5	5
1	

840	2
420	2
210	2
105	3
35	5
35	5
7	7
1	

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$(720, 840) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5 = 8 \cdot 15 = 120.$$

- Највећи заједнички делилац два броја може се одредити и помоћу **Еуклидовог алгоритма.**

Дефиниција: Ако је највећи заједнички делилац два броја једнак 1 онда се за те бројеве каже да су **узајамно прости.**

Пример: Методом Еуклидовог алгоритма наћи највећи заједнички делилац бројева 420 и 360.

Решење: 420:360 = 1

$\underline{-360}$

$60 = r_1 \neq 0$

360 : 60 = 6

$\underline{-360}$

$0 = r_2$

NZD(420, 360) = 60

Тражи се количник бројева 420 и 360, добије се остатак $60 = r_1 \neq 0$. Како је остатак различит од нуле наставља се поступак дељења делиоца 360 и добијеног остатка 60. Поступак дељења се наставља све док се у неком кораку не добије да је остатак једнак нули. Највећи заједнички делилац је последњи остатак различит од нуле.

Дефиниција: Најмањи заједнички садржалац бројева *a, b, c,...* је најмањи број који је дељив свим датим бројевима.

- Најмањи заједнички садржалац означавамо са $[a,b,c,...]$ или *NZS (a,b,c,..)*.

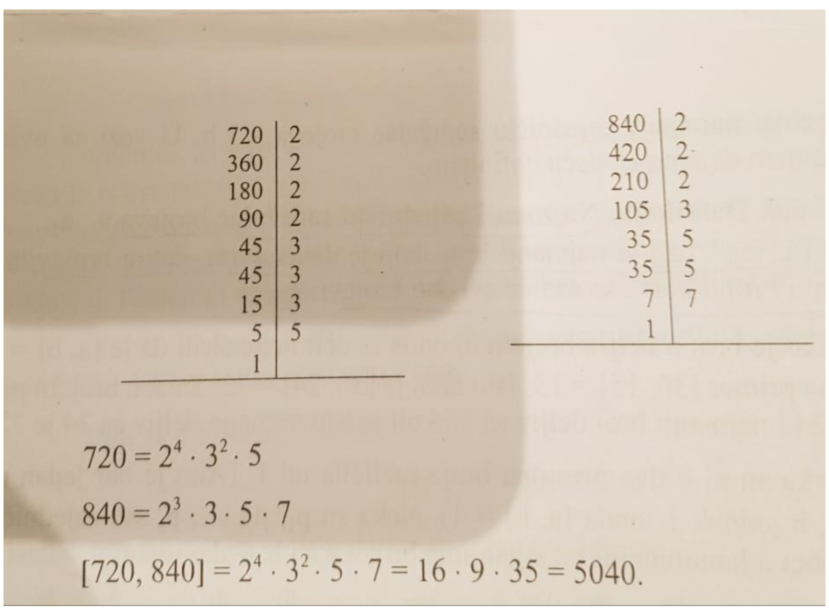
Теорема: Најмањи заједнички садржалац два или више бројева једнак је производу највећих степена свих простих чинилаца заједничких или не, који се јављају у каноничним разлагањима датих бројева.

- У пракси тражење најмањег заједничког садржаоца два или више бројева састоји се из два корака:
  1. Одреди се канонично разлагање датих бројева
  2. Тражи се производ свих простих чиниоца заједничких или не који се јављају у овим разлагањима и узимају се њихови највећи могући степени.

Теорема: Производ највећег заједничког делиоца и најмањег заједничког садржаоца два броја једнак је производу тих бројева.

$$(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b \quad \text{или} \quad NZD(a,b)\cdot NZS(a,b)=a\cdot b$$

Пример: Наћи најмањи заједнички садржалац за бројеве 720 и 840.



720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
45	3
15	3
5	5
1	

840	2
420	2
210	2
105	3
35	5
35	5
7	7
1	

$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$[720, 840] = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 16 \cdot 9 \cdot 35 = 5040.$

ЗАДАЦИ

1. Наћи:
   a) NZD(12, 20)
   b) NZD (630, 693, 231)

Решење:

a)

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$$

NZD(12, 20) = 4

b)

$$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$693 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$
$$231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$$

NZD(630, 693, 231) = 21

2. Наћи:
   a) NZS(4, 12, 16, 48)
   b) NZS(240, 396, 420)

Решење:

a)

$$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$$
$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$
$$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$$
$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$$

NZS(4, 12, 16, 48) = 48

b)

$$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$$
$$396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$$
$$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

NZS(240, 396, 420) = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 55440$

3. Три штапа дужине 48 *cm*, 60 *cm* и 90 *cm* треба исећи на комаде једнаких дужина тако да буду максималне могуће дужине. Колико таквих комада можемо добити?

Решење:

$48 = 2^4 \cdot 3$

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ NZD(48, 60, 90) = 6 Штапови треба да буду дужине 6 cm.

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

48:6 =8 Од првог штапа се добија 8 комада дужине 6 cm.
60 : 6 = 10 Од другог штапа се добије 10 комада дужине 6 cm.
90 : 6 =15 Од трећег штапа се добије 15 комада дужине 6 cm.

Укупно се добије 8+10+15 = 33 комада.

4. Од 24 руже, 60 каранфила и 72 гербера направљен је највећи могући број једнаких букета. Колико ће бити таквих букета и колико ће коштати сваки букет ако је цена руже 140 динара, каранфила 150 динара и гербера 200 динара.

Решење:

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ NZD(24, 60, 72) =12 букета.

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

24 : 12 = 2 руже
60 : 12 = 5 каранфила
72 : 12 = 6 гербера

$2 \cdot 140 + 5 \cdot 150 + 6 \cdot 200 = 2230$ динара. (У једном букету има 2 руже по 140 динара, 5 каранфила по 150 динара и 6 гербера по 200 динара).

5. Три атлетичара стартују истовремено на кружној стази. Први обиђе ту стазу за 10 минута, други за 12 минута а трећи за 15 минута. После колико минута ће се сва три атлетичара поново наћи на месту поласка?

Решење:

$10 = 2 \cdot 5$

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ NZS(10, 12, 15) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ минута.

$15 = 3 \cdot 5$

6. Одреди најмањи природни број који при дељењу са 64 и 72 даје остатак 3.

Решење: Најмањи број који при дељењу са 64 и 72 нема остатак је NZS тих бројева.

$64 = 2^6$

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

NZS(64, 72) = $2^6 \cdot 3^2 = 576$

Број који је за 3 већи од 576 је 579, то је најмањи број који при дељењу са 64 и 72 даје остатак 3.

7. Наћи најмањи заједнички садржалац за бројеве 144 и 54 без одређивања каноничног разлагања датих бројева.

Решење:

$$NZD(a,b) \cdot NZS(a,b) = a \cdot b \quad \text{(на основу Теореме)}$$

NZD(a,b) можемо да одредимо применом Еуклидовог алгоритма (јер нам није дозвољено канонично разлагање).

144 : 54 = 2
<u>-108</u>
$36 = r_1 \neq 0$

54 : 36 =1
<u>-36</u>
$18 = r_2 \neq 0$

36 :18 = 2
<u>-36</u>
$r_3 = 0$ Последњи остатак различит од нуле је $r_2 = 18$ и то је NZD(144,54) = 18.

Сада из $NZD(a,b) \cdot NZS(a,b) = a \cdot b$ следи да је

$$NZS(a,b) = \frac{a \cdot b}{NZD(a,b)} = \frac{144 \cdot 54}{18} = 432.$$

8. Доказати да су бројеви 673 и 421 узајамно прости бројеви применом Еуклидовог алгоритма.

Решење:

Два броја су узајамно проста ако је њихов највећи заједнички делилац једнак 1.

673 :421 = 1
<u>-421</u>
252= $r_1 \neq 0$

421 : 252 = 1
<u>-252</u>
169 = $r_2 \neq 0$

252 : 169 = 1
<u>-169</u>
83= $r_3 \neq 0$

169 : 83 = 2
<u>-166</u>
3 = $r_4 \neq 0$

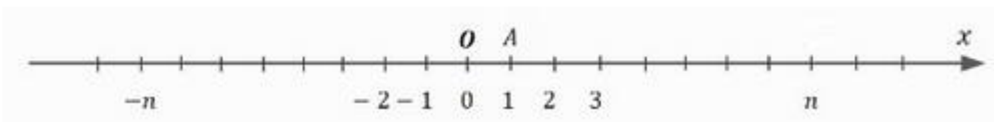
83 : 3 =27
<u>-81</u>
2 = $r_5 \neq 0$

3 : 2 =1
<u>-2</u>
1 = $r_6 \neq 0$ $\Longrightarrow$ Последњи остатак различит од нуле је 1.

2 : 1 = 2
<u>-2</u>
0 = r_7 NZD(673, 421) = 1 Бројеви 673 и 421 су узајамно прости.

ЦЕЛИ БРОЈЕВИ

- Скуп целих бројева који означавамо са **Z** је скуп свих природних бројева, нуле и свих негативниг целих бројева.
- Цели бројеви су сви „округли“ бројеви без децимала, укључујући нулу, позитивне и негативне бројеве.
- $Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
- Целе бројеве можемо представити на бројевној правој.



- За два цела броја кажемо да су <u>супротни</u> нпр. 2 и (-2) ако су њима придружене тачке на бројевној правој на једнаком растојању од 0, али са различитих страна. Супротан број броју a је број $-a$. Супротан број броју $-a$ је $-(-a)=a$. Збир два супротна броја једнак је 0. Број 2 зове се апсолутна вредност или модул броја 2 и броја (-2).

  <u>Дефиниција</u>: Апсолутна вредност или модул целог броја x у ознаци $|x|$ дефинише се на следећи начин:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ако је } x > 0, \\ 0, & \text{ако је } x = 0, \\ -x, & \text{ако је } x < 0, \end{cases} \quad \text{тј. } |x| = \begin{cases} x, & \text{ако је } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{ако је } x < 0. \end{cases}$$

- Апсолутна вредност је увек позитиван број и она представља растојање неког броја од 0 на бројевној правој. Супротни бројеви имају једнаку апсолутну вредност.

<u>Сабирање целих бројева</u>

- Збир два цела броја истог знака има тај исти знак, док је његова апсолутна вредност једнака збиру апсолутних вредности сабирака.

$6 + 3 = 9$ (оба броја позитивна и збир је позитиван)

$-6 - 3 = -9$ (оба броја негативна и збир је негативан)

- Збир два цела броја различитог знака и различитих апсолутних вредности има знак оног сабирка чија је апсолутна вредност већа. Апсолутна вредност збира једнака је разлици апсолутних вредности сабирака, где од сабирка са већом апсолутном вредношћу одузимамо сабирак са мањом апсолутном вредношћу.

$6 - 3 = 3$ (збир има знак броја веће апсолутне вредности)

$-6+3 = -3$ (збир има знак броја веће апсолутне вредности)

- Збир два супротна броја једнак је 0.

- Код сабирања целих бројева важи комутативни и асоцијативни закон:

$a+b=b+a$ комутативни закон за сабирање

$(a+b)+c=a+(b+c)$ асоцијативни закон за сабирање.

<u>Множење целих бројева</u>

- Апсолутна вредност производа два цела броја једнака је производу апсолутних вредности тих бројева.
- Ако су оба цела броја истог знака знак производа је „+“

$6 \cdot 3 = 18$

$(-6) \cdot (-3) = 18$

- Ако су бројеви различитог знака, онда је знак производа „ - „.

$6 \cdot (-3) = -18$

$(-6) \cdot 3 = -18$

- За множење бројевима 0,1,-1 важе правила:

$0 \cdot a = 0$

$1 \cdot a = a$

$-1 \cdot a = -a$

- Код множења целих бројева важе особине комутативност, асоцијативност и дистрибутивност множења у односу на сабирање.

$a \cdot b = b \cdot a$ комутативни закон за множење

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ асоцијативни закон за множење

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ дистрибутивни закон множења према сабирању

Дељење целих бројева

Дефиниција: Количник целих бројева a и b $(b \neq 0)$ је цео број c (ако постоји) тј. $a : b = c$ ако је $a = b \cdot c$. У овом случају каже се да је a дељиво са b или b дели a у ознаци $b \mid a$.

- Апсолутна вредност количника два броја једнака је количнику апсолутних вредности тих бројева.
- Ако су два цела броја истог знака количник има знак „+“

$$6 : 3 = 2$$
$$(-6) : (-3) = 2$$

- Ако су два цела броја различитог знака, онда је знак количника ,,-„.

$$6 : (-3) = -2$$
$$(-6) : 3 = -2$$

- Количник 0 и неког броја једнак је 0, $\left(\frac{0}{a} = 0\right)$.
- Дељење нулом није дозвољено.

Теорема: За било која два цела броја a и b постоји једнозначно одређени цели бројеви q и r за које важи:

$$a : b = q \quad \text{и остатак } r$$

тада је $a = b \cdot q + r$, где је q количник а r остатак $(r < b)$.

Теорема: Број a је дељив бројем b ако и амо ако се при дељењу броја a бројем b добије да је остатак $r = 0$.

Прости и сложени бројеви

Дефиниција: За број кажемо да је прост ако је дељив само са собом и јединицом.

- Прости бројеви су: 2,3,5,7,11,13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,...

Дефиниција: Број је сложен ако има више од два делиоца тј. ако није прост.

- Сложени бројеви су: 4,6,8,10,12,14,15,16,18,20,21,22,...

Дефиниција: Број један није ни прост ни сложен број.

Теорема Еуклида: Постоји бесконачно много простих бројева.

Правила дељивости бројева

Теорема: Број је дељив бројем 2 ако је паран тј. ако је последња цифра (цифра јединица) нека од цифара: 0,2,4,6,8.

- Бројеви дељиви бројем 2 су: 48, 56, 110, 234896, 359172...

Теорема: Број је дељив бројем 3 или бројем 9 ако је збир цифара тог броја дељив бројем 3 или бројем 9.

- Бројеви дељиви са 3 су: 18, 72, 54, 78, 1002, 8094, ...
  јер је нпр. 78

  7+8=15, број 15 је дељив бројем 3, па је и број 78 дељив бројем 3.

- Бројеви дељиви бројем 9 су: 81, 1386, 8874...
  јер је нпр. 8874

  8+8+7+4=27, број 27 је дељив са 9, па је и број 8874 дељив бројем 9.

Теорема: Број је дељив бројем 4 или бројем 20 или бројем 25 ако је број који означавају последње две цифре дељив са 4 или 20 или 25.

- Бројеви дељиви са 4 су: 20, 100, 140, 412, 704, 15412,...
- Бројеви дељиви са 20 су: 1400, 540, 169180,...
- Бројеви дељиви са 25 су: 45850, 308950, 1950, 18625, 4575,...

Теорема: Број је дељив са 8 или 125 ако је број који означавају последње његове три цифре дељив са 8 или 125.

- Бројеви дељиви са 8 су: 1168, 256, 2592, 260712,...
- Бројеви дељиви са 125 су: 1000, 5250, 790625,...

Теорема: Број је дељив бројем 6 ако је дељив бројем 2 и бројем 3.

- Бројеви дељиви бројем 6 су: 1104, 228, 870, 81408,...
  јер је нпр. 1104 дељив са 2 јер је цифра јединица паран број

  1+1+0+4 = 6 збир цифара овог броја је дељив бројем 3.

Теорема: Број је дељив бројем 7 ако се занемари његова цифра јединица и од остатка одузме двострука вредност занемарене цифре.

- Бројеви дељиви бројем 7 су: 98, 231, 623, 10213, ...
  јер је нпр. код броја 231 ако се занемари цифра јединица добија се број 23.
  Од броја 23 се одузме двострука вредност занемарене цифре $23-2\cdot1=21$ дељиво са 7.

Теорема: Број је дељив бројем 11 када је разлика између збира цифара које стоје на непарним местима и оних које стоје на парним местима дељив са 11.

- Бројеви дељиви бројем 11 су: 33, 132, 495, 803, 862983, 8684016,...
  нпр. код броја 8684016 збир цифара на непарним местима је: 8+8+0+6=22,
  збир цифара на парним местима је: 1+4+6=11. Сада је 22-11=11 дељиво са 11.

Теорема: Број је дељив бројем 12 ако је дељив бројевима 3 и 4.

Теорема: Број је дељив бројем 15 ако је дељив бројевима 3 и 5.

БРОЈНИ СИСТЕМИ

Теорема: Сваки природан број a може се написати у облику:

$$a = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_1 b^1 + a_0 b^0 = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_b$$

где је b основа бројног система.

- За $b = 10$ добијамо **декадни бројни систем.** У декадном бројном систему за записивање бројева користе се цифре 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
  У овом систему број a записујемо у облику:
  $a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1 10^1 + a_0 10^0 = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_{10}$.

- За $b = 2$ добијамо **бинарни бројни систем**. У бинарном бројном систему се користе само цифре 0 и 1. Било који бинарни број се записује комбинацијом цифара 0 и 1. У овом систему НЕ постоје цифре 2,3,4,5,6,7,8,9.
  У овом систему број a записујемо у облику:
  $a = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + ... + a_1 2^1 + a_0 2^0 = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_2$.

- За $b = 5$ добија се систем са основом 5. У овом систему постоје само цифре 0,1,2,3,4.
  У овом систему број a записујемо у облику:
  $a = a_n 5^n + a_{n-1} 5^{n-1} + ... + a_1 5^1 + a_0 5^0 = (a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_5$.

Пребацивање бројева из децималног бројног система у бинарни систем и систем са основом 5

$$\boxed{(\ )_{10} \rightarrow (\ )_2}$$

1. Дате декадне бројеве пребацити у бинарни бројни систем.

а) $(84)_{10} \rightarrow (\ )_2$

б) $(639)_{10} \rightarrow (\ )_2$

Решење:

а)

	остатак
$84:2=42$	0
$42:2=21$	0
$21:2=10$	1
$10:2=5$	0
$5:2=2$	1
$2:2=1$	0
$1:2=0$	1

Број 84 се дели са 2, пише се резултат 42 и са стране се пише остатак 0. Поступак дељења се наставља све док се за резултат не добије 0. Бинарни број се чита из остатка одоздо навише.

$(84)_{10} = (1010100)_2$

б)

	остатак
$639:2=319$	1
$319:2=159$	1
$159:2=79$	1
$79:2=39$	1
$39:2=19$	1
$19:2=9$	1
$9:2=4$	1
$4:2=2$	0
$2:2=1$	0
$1:2=0$	

$(639)_{10} = (1001111111)_2$

$$\boxed{(\ )_{10} \rightarrow (\ )_5}$$

2. Дате декадне бројеве пребацити у систем са основом 5.

   а) $(734)_{10} \rightarrow (\ )_5$

   б) $(128)_{10} \rightarrow (\ )_5$

Решење:

а)

	остатак
$734:5=146$	4
$146:5=29$	1
$29:5=5$	4
$5:5=1$	0
$1:5=0$	1

$(734)_{10} \rightarrow (10414)_5$

б)

	остатак
$128:5=25$	3
$25:5=5$	0
$5:5=1$	0
$1:5=0$	1

$(128)_{10} \rightarrow (1003)_5$

Пребацивање бројева из бинарног бројног система у декадни и из система са основом 5 у декадни

$$\boxed{(\ )_2 \rightarrow (\ )_{10}}$$

3. Дате бинарне бројеве пребацити у декадни бројни систем.

   а) $(101011)_2 \rightarrow (\ )_{10}$

   б) $(1101)_2 \rightarrow (\ )_{10}$

Решење:

а)

$$\begin{pmatrix} {\scriptstyle 5\,4\,3\,2\,1\,0} \\ 101011 \\ \end{pmatrix}_2 = 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^5 = 1+2+0+8+0+32 = (43)_{10}$$

$\leftarrow$

Сваки број има своју позицију. Идући од десне ка левој страни одређују се позиције сваког броја, од нулте, прве, друге,...

б) $\left(\overset{3\,2\,1\,0}{1101}\right)_2 = 1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3 = 1+0+4+8 = (13)_{10}$

$$\boxed{(\ )_5 \rightarrow (\ )_{10}}$$

4. Дате бројеве из основе 5 пребацити у декадни бројни систем.

а) $(124)_5 \rightarrow (\ )_{10}$

б) $(3241)_5 \rightarrow (\ )_{10}$

Решење:

а) $\left(\overset{2\,1\,0}{124}\right)_5 = 4\cdot 5^0 + 2\cdot 5^1 + 1\cdot 5^2 = 4\cdot 1 + 2\cdot 5 + 1\cdot 25 = 4+10+25 = (39)_{10}$ $\boxed{5^0 = 1}$

б)

$\left(\overset{3\,2\,1\,0}{3241}\right)_5 = 1\cdot 5^0 + 4\cdot 5^1 + 2\cdot 5^2 + 3\cdot 5^3 = 1\cdot 1 + 4\cdot 5 + 2\cdot 25 + 3\cdot 125 = 1+20+50+375 =$

$(446)_{10}$

НАПОМЕНА: Ако је потребно да се број пребаци из бинарног бројног система у основу 5, онда прво пребаците број из бинарног у декадни бројни систем, а затим из декадног у основу 5. Или ако је потребно број из основе 5 пребацити у бинарни, такође прво се из основе 5 пребаци у декадни а затим из декадног у бинарни.

ЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ

Линеарна једначина са једном непознатом

1° Једначина

(1) $ax = b,\ a,\ \ b \in R$

је општи облик линеарне једначине са једном непознатом, где је x непозната.

2° Број r је решење једначине (1) ако је $ar = b$.

3° Ако је $a \neq 0$ једначина (1) има јединствено решење $x = \frac{b}{a}$. Заиста $a\frac{b}{a} = b$.

4° Ако је $a = 0$ и $b \neq 0$, једначина (1) је **немогућа** и нема решења.

5° Ако је $a = 0$ и $b = 0$, једначина (1) је **неодређена** и има бесконачно много решења.

6° Једначине $P\,(x) = 0$ и $Q\,(x) = 0$ су еквивалентне ако је тачна формула

$P\,(x) = 0 \Leftrightarrow Q\,(x) = 0$.

Како решавати једначину?

- Прво се ослободимо разломака (ако их има) тако што целу једначину помножимо са НЗС
- Онда се ослободимо заграда (ако их има) множећи "сваки са сваким''.
- Непознате пребацимо на једну а познате на другу страну знака =.

(Напомена: приликом преласка са једне на другу страну мења се знак)

- "средимо'' обе стране (одузмемо и саберемо) и добијемо a · x = b
- Изразимо непознату $x = \frac{b}{a}$

Линеарне неједначине са једном непознатом и њихово решавање

Општи облик линеарне неједначине са једном непознатом се може јавити у једном од облика:

(1) $ax > b$, (2) $ax \geq b$, (3) $ax < b$, (4) $ax \leq b$.

где су a, b реални бројеви, а x непозната.

За решавање неједначине (1) важи следеће:

1° За $a > 0$ има за решење сваки реалан број $x > \frac{b}{a}$;

2° За $a < 0$ има за решење сваки реалан број $x < \frac{b}{a}$;

3° За $a = 0$, $b < 0$, решења су сви реални бројеви;

4° За $a = 0$, $b > 0$, нема решења.

Систем линеарних једначина

1. Конјункција једначина $a_1x + b_1y = c_1 \ \wedge \ a_2x + b_2y = c_2$ по непознатим x и y, где су a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 задати реални бројеви, при чему је бар један од бројева a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 различит од нуле, назива се систем од две једначине са две непознате.

2. Уређен пар реалних бројева (α, β) назива се решење система ако је $a_1\alpha + b_1\beta = c_1 \ \wedge \ a_2\alpha + b_2\beta = c_2$.

Задаци:

1. Решити једначине:
а) $3(x + 2) – 2(1 – x) = 4x + 5$
б) $3x – (15 + 2x – (5x + 11)) = 2x – 8$

Решење:

а) $3(x + 2) – 2(1 – x) = 4x + 5$ прво ћемо се ослободити заграда
$3x + 6 – 2 + 2x = 4x + 5$ затим непознате пребацујемо на једну, познате на другу страну
$3x + 2x – 4x = 5 – 6 + 2$
$x = 1$

б) $3x – (15 + 2x – (5x + 11)) = 2x – 8$ ослобађамо се заграда али водећи рачуна о томе да крећемо од најмање заграде, а на крају се ослобађамо највеће
$3x – (15 +2x – 5x – 11) = 2x – 8$
$3x – (– 3x + 4) = 2x – 8$
$3x + 3x – 4 = 2x – 8$
$6x – 4 = 2x – 8$
$6x – 2x = –8 + 4$
$4x = – 4$
$x = \frac{-4}{4}$
$x = –1$

2. Решити једначине:
а) $5(x – 1) – 4(x – 3) = – 20$
б) $10x – 2(25 – 3x) – 3 = 8(2x – 6) – 5$
в) $3x + 5(x + 2)(x – 2) = 5(x – 1)(x + 1) + 6$

Решење:

а) $5(x – 1) – 4(x – 3) = – 20$ ослобађамо се заграде и водимо рачуна о томе да када је испред заграде минус, унутар заграде мењамо знак
$5x – 5 – 4x + 12 = – 20$
$x + 7 = – 20$
$x = – 20 – 7$ па је $x = – 27$

б) $10x - 2(25 - 3x) - 3 = 8(2x - 6) - 5$

$$10x - 50 + 6x - 3 = 16x - 48 - 5$$
$$16x - 53 = 16x - 53$$
$$16x - 16x = -53 + 53$$

$0x = 0$ на основу правила 5° ова једначина је неодређена и има бесконачно много решења

в) $3x + 5(x + 2)(x - 2) = 5(x - 1)(x + 1) + 6$ у овом примеру заграде смо „средили“ помоћу формуле за разлику квадрата $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$; заграде смо могли да средимо и тако што помножимо сваки са сваким, али пазимо да испред заграде имамо 5, па све множимо и са 5

$$3x + 5(x^2 - 2^2) = 5(x^2 - 1^2) + 6$$
$$3x + 5x^2 - 20 = 5x^2 - 5 + 6$$
$$5x^2 + 3x - 5x^2 = 1 + 20$$
$$3x = 21$$
$$x = \frac{21}{3}$$
$$x = 7$$

3. Решити једначине:

а) $(x - 1)(x - 2) + (x - 2)(x - 3) - 2(x + 1)(x - 8) = 0$

б) $(x + 8)^2 + (x + 3)^2 = (x + 12)^2 + (x - 5)^2$

Решење:

а) $(x - 1)(x - 2) + (x - 2)(x - 3) - 2(x + 1)(x - 8) = 0$ заграде се ослобађамо тако што множимо сваки са сваким и водимо рачуна о томе да када је испред заграде минус, унутар заграде мењамо знак

$$x^2 - 2x - x + 2 + x^2 - 3x - 2x + 6 - 2(x^2 - 8x + x - 8) = 0$$
$$2x^2 - 8x + 8 - 2x^2 + 14x + 16 = 0$$
$$6x + 24 = 0$$
$$6x = -24$$
$$x = \frac{-24}{6}$$
$$x = 4$$

б) $(x + 8)^2 + (x + 3)^2 = (x + 12)^2 + (x - 5)^2$ у овом примеру примењујемо формуле за квадрат бинома: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$x^2 + 16x + 64 + x^2 + 6x + 9 = x^2 + 24x + 144 + x^2 - 10x + 25$$
$$2x^2 + 22x + 73 = 2x^2 + 14x + 169$$
$$2x^2 - 2x^2 + 22x - 14x = 169 - 73$$
$$8x = 96$$
$$x = \frac{96}{8}$$
$$x = 12$$

4. Решити једначине:

а) $\frac{5x}{2} = \frac{3x+24}{6}$
б) $\frac{x+2}{5} - 3 = \frac{x-1}{2} - x$
в) $2 + \frac{y+17}{5} - \frac{3y-7}{4} = 0$
г) $\frac{5-x}{6} = 1 - \frac{7x+2}{12}$
д) $\frac{2x-1}{3} - \frac{4-x}{2} = x + 1 + \frac{x-3}{6}$

Решење:

У овим примерима ћемо се прво ослободити разломака, множећи једнакост НЗС-ом, затим средити израз и одредити x.

а) $\frac{5x}{2} = \frac{3x+24}{6}$ / *6 НЗС(2,6) = 6, па једнакост множимо са 6 и вршимо могућа скраћивања

$6\frac{5x}{2} = 6\frac{3x+24}{6}$
$15x = 3x + 24$
$15x - 3x = 24$
$12x = 24$
$x = \frac{24}{12}$
$x = 2$

б) $\frac{x+2}{5} - 3 = \frac{x-1}{2} - x$ /*10 НЗС(5,2) = 10, па једнакост множимо са 10 и вршимо могућа скраћивања

$10\frac{x+2}{5} - 3 \cdot 10 = 10\frac{x-1}{2} - 10 \cdot x$
$2(x + 2) - 30 = 5(x - 1) - 10x$
$2x + 4 - 30 = 5x - 5 - 10x$
$2x - 26 = - 5x - 5$
$2x + 5x = - 5 + 26$
$7x = 21$
$x = \frac{21}{7}$
$x = 3$

в) $2 + \frac{y+17}{5} - \frac{3y-7}{4} = 0$ /*20 НЗС(5,4) = 20, па једнакост множимо са 20 и вршимо могућа скраћивања

$2 \cdot 20 + 20\frac{y+17}{5} - 20\frac{3y-7}{4} = 20 \cdot 0$
$40 + 4(y + 17) - 5(3y - 7) = 0$
$40 + 4y + 68 - 15y + 35 = 0$
$- 11y + 143 = 0$
$- 11y = - 143$

$y = \frac{-143}{-11}$
$y = 13$

г) $\frac{5-x}{6} = 1 - \frac{7x+2}{12}$ /*12 НЗС(6,12) = 12, па једнакост множимо са 12 и вршимо могућа скраћивања

$12\frac{5-x}{6} = 12 \cdot 1 - 12\frac{7x+2}{12}$

$2(5-x) = 12 - (7x+2)$ 7x+2 стављамо у загради јер је испред разломка био минус

$10 - 2x = 12 - 7x - 2$

$-2x + 7x = 10 - 10$

$5x = 0$

$x = 0$

д) $\frac{2x-1}{3} - \frac{4-x}{2} = x + 1 + \frac{x-3}{6}$ /*6 НЗС(2,3,6) = 6, па једнакост множимо са 6 и вршимо могућа скраћивања

$6\frac{2x-1}{3} - 6\frac{4-x}{2} = 6x + 6 \cdot 1 + 6\frac{x-3}{6}$

$2(2x-1) - 3(4-x) = 6x + 6 + x - 3$

$4x - 2 - 12 + 3x = 7x + 3$

$7x - 14 = 7x + 3$

$7x - 7x = 3 + 14$

$0x = 17$

Ова једначина нема решења на основу правила 4°.

5. Мајка има 27 година, а ћерка 3 године. Кроз колико година ће мајка бити четири пута старија од ћерке?

Решење: Означимо са x број година који треба да прође да би мајка била четири пута старија од ћерке, тада реченицу: „Мајка ће за x година година бити четири пута старија од своје ћерке“ записујемо:

$27 + x = 4(3 + x)$

Решимо сада једначину

$27 + x = 12 + 4x$

$x - 4x = 12 - 27$

$-3x = -15$

$x = \frac{-15}{-3}$

$x = 5$

Дакле, кроз 5 година, мајка ће бити четири пута старија од ћерке.

Да проверимо:

Кроз 5 година мајка ће имати 27 + 5 = 32 године, а ћерка 3 + 5 = 8.

Дакле, видимо да ће кроз 5 година мајка бити четири пута старија од ћерке.

6. У једном разреду $\frac{3}{7}$ ученика чине девојчице. Ако би дошле још 4 девојчице, тада би у разреду био једнак број девојчица и дечака. Одредити колико је ученика било у разреду.

Решење: Означимо са x број ученика у датом разреду. Тада број девојчица у разреду записујемо као $\frac{3}{7}$x. Реченицу: „Ако у разред дођу још 4 девојчице, у разреду ће бити једнак број дечака и девојчица(значи пола одељења биће девојчице, а пола дечаци)" записаћемо као:
$\frac{3}{7}x + 4 = \frac{x+4}{2}$ где је x + 4 број ученика након што дођу још 4 девојчице, а $\frac{x+4}{2}$ предстаља половину тог броја ученика, односно број девојчица, као и број дечака.
Решимо сада једначину.

$\frac{3}{7}x + 4 = \frac{x+4}{2}$ /*14

$2 \cdot 3x + 14 \cdot 4 = 7 \cdot (x + 4)$

$6x + 56 = 7x + 28$

$6x - 7x = 28 - 56$

$-x = -28$ /*(-1)

$x = 28$

7. Странице правоугаоника се разликују за 3 cm. Ако се свака страница повећа за 2 cm, обим правоугаоника ће износити 62 cm. Израчунати странице правоугаоника.

Решење: Обим правоугаоника рачунамо по формули O = 2a + 2b, где је a = b + 3 (јер се странице разликују за 3 cm)
Обим новог правоугаоника(када се свака страница повећа за 2 cm) је $O_1 = 2a_1 + 2b_1$ и он износи 62 cm, где је
$a_1 = a + 2$
$b_1 = b + 2$

$O_1 = 2a_1 + 2b_1$
$O_1 = 62$ cm
Односно, $2a_1 + 2b_1 = 62$ cm , запишимо сада a_1 и b_1 преко a и b
$2(a + 2) + 2(b + 2) = 62$ cm , заменимо сада a = b + 3
$2(b + 3 + 2) + 2(b + 2) = 62$ cm
$2(b + 5) + 2(b + 2) = 62$ cm сада решимо једначину и одредимо колико износи страница b
$2b + 10 + 2b + 4 = 62$ cm
$4b + 14 = 62$ cm
$4b = (62 - 14)$ cm
$4b = 48$ cm
$b = \frac{48}{4}$ cm
$b = 12$ cm
Одредимо сада страницу a
$a = b + 3$
$a = (12 + 3)$ cm
$a = 15$ cm

8. Решити неједначине:
а) $5x - 2 < 2x + 1$
б) $-4x \geq -2x + 3$

Напомена. При записивању скупа решења неједначина пазимо на следеће:
Код $+\infty$ и $-\infty$ увек иду мале заграде ( )
Код знакова < и > мале заграде
Код $\leq$ и $\geq$ иду средње заграде [ ]
Мале заграде (,) нам говоре да ти бројеви нису у скупу решења, док [,] говоре да су и ти бројеви у решењу.

Решење:

а) $5x - 2 < 2x + 1$ као и код једначина, непознате пребацујемо на једну, познате на другу страну
$5x - 2x < 1 + 2$
$3x < 3$
$x < \frac{3}{3}$
$x < 1$
Скуп решења неједначине записујемо: $x \in (-\infty, 1)$

б) $-4x \geq -2x + 3$
$-4x + 2x \geq 3$
$-2x \geq 3 /:(-2)$ да бисмо одредили x, неједначину делимо са – 2, па како делимо негативном вредношћу, мења се знак неједнакости
Дакле, добијамо $x \leq -\frac{3}{2}$
Скуп решења неједначине записујемо: $x \in (-\infty, -\frac{3}{2}]$

9. Решити неједначине:
а) $3(x - 2) + 9x < 2(x + 3) + 8$
б) $5(4 - 3x) < 2(2x - \frac{1}{2})$
в) $2x(2x - 5) - (2x + 1)^2 < -1$

Решење:

а) $3(x - 2) + 9x < 2(x + 3) + 8$ ослобађамо се заграда
$3x - 6 + 9x < 2x + 6 + 8$ непознате пребацујемо на једну, познате на другу страну неједнакости
$3x + 9x - 2x < 6 + 8 + 6$
$10x < 20$
$x < \frac{20}{10}$
$x < 2$
Скуп решења неједначине записујемо: $x \in (-\infty, 2)$

б) $5(4 - 3x) < 2(2x - \frac{1}{2})$ ослобађамо се заграда

$20 - 15x < 4x - 1$ непознате пребацујемо на једну, познате на другу страну неједнакости

$-15x - 4x < -1 - 20$

$-19x < -21 /:(-19)$ неједнакост делимо негативном вредношћу, па се знак мења

$x > \frac{-21}{-19}$ односно $x > \frac{21}{19}$

Скуп решења неједначине записујемо: $x \in (\frac{21}{19}, +\infty)$

в) $2x(2x - 5) - (2x + 1)^2 < -1$ ослобађамо се заграде и квадрирамо бином

$4x^2 - 10x - (4x^2 + 4x + 1) < -1$ ослобађамо се заграде и пазимо да је испред заграде минус па се у загради мења знак, затим непознате пребацујемо на једну, познате на другу страну неједнакости

$4x^2 - 10x - 4x^2 - 4x - 1 < -1$

$-14x < -1 + 1$

$-14x < 0$ делимо неједнакост са – 14, па се знак мења

$x > 0$

Скуп решења неједначине записујемо: $x \in (0, +\infty)$

10. Решити неједначину:

$\frac{2x+1}{3} - \frac{3x-2}{2} \geq -1$ као и код једначина, прво ћемо се ослободити разломака, множимо неједначину НЗС(2,3) = 6 и вршимо могућа скраћивања

$2(2x + 1) - 3(3x - 2) \geq -6$

$4x + 2 - 9x + 6 \geq -6$

$4x - 9x \geq -6 - 2 - 6$

$-5x \geq -14 /:(-5)$

$x \leq \frac{-14}{-5}$ односно $x \leq \frac{14}{5}$

Скуп решења неједначине записујемо: $x \in (-\infty, \frac{14}{5}]$

11. Решити неједначину:

$5 - \frac{x-1}{4} \geq 2 + \frac{5x+5}{8}$ прво ћемо се ослободити разломака, множимо неједначину НЗС(4,8) = 8 и вршимо могућа скраћивања

$40 - 2(x - 1) \geq 16 + 5x + 5$ ослобађамо се заграде пазећи на знак

$40 - 2x + 2 \geq 21 + 5x$ непознате пребацујемо на једну, познате на другу страну неједнакости

$-2x - 5x \geq 21 - 42$

$-7x \geq -21$ неједнакост делимо негативном вредношћу, па се знак мења

$x \leq \frac{-21}{-7}$ односно $x \leq \frac{21}{7}$

Скуп решења неједначине записујемо: $x \in (-\infty, 3]$

СИСТЕМ ДВЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА ДВЕ НЕПОЗНАТЕ

Решити систем две линеарне једначина са две непознате значи наћи пар бројева који задовољавају обе једначине.
Елементарне методе за решавање ових система су:

- **-метода замене**
- **-метода супротних коефицијената.**

Поред ових, системе можемо решити помоћу других метода: Гаусовом, помоћу детерминанти, матрицама, графички итд.

Напоменимо само да дати систем може имати: јединствено решење, бесконачно много решења (неодређен) или да нема решења (немогућ).

Гаусов метод подразумева постепену елиминацију непознатих из датог система.

12. Решити систем једначина методом замене.

$$\begin{array}{cl}
2x + y = 5 & \\
x - 3y = 6 & \\
\hline
y = 5 - 2x & \text{из прве једначине ћемо изразити y} \\
x - 3y = 6 & \\
\hline
y = 5 - 2x & \\
x - 3(5 - 2x) = 6 & \text{и заменити у другој једначини система} \\
\hline
y = 5 - 2x & \\
x - 15 + 6x = 6 & \\
\hline
y = 5 - 2x & \\
7x = 21 & \\
\hline
y = 5 - 2x & \\
x = 3 & \text{сада када смо добили x заменићемо у једначини y = 5 – 2x да би добили y} \\
\hline
y = 5 - 2 \cdot 3 & \\
x = 3 & \\
\hline
y = -1 & \\
x = 3 & \qquad (x,y) = (3, -1)
\end{array}$$

13. Решити систем једначина методом супротних коефицијената

$$\begin{array}{cl}
2x + y = 5 & \text{прву једначину помножимо са 3 како би уз y добили супротне коефицијенте} \\
x - 3y = 6 & \\
\hline
6x + 3y = 15 & \text{сада сабирамо 1. и 2. једначину како би елиминисали y} \\
x - 3y = 6 & \\
\hline
7x = 21 & \text{оно што смо добили записујемо уместо прве једначине а другу преписујемо} \\
x - 3y = 6 & \\
\hline
x = 3 & \text{кад одредимо x, мењамо у другој једначини како би израчунали y} \\
y = -1 &
\end{array}$$

$(x,y) = (3, -1)$

14. Збир година мајке и ћерке је 46. После 10 година мајка ће бити 2 пута старија од ћерке. Колико година сада има мајка а колико ћерка?

Обележимо са:
x – године мајке
y – године ћерке

После 10 година
мајка → $x + 10$ година
ћерка → $y + 10$ година

$x + y = 46$ формирамо систем на основу података из текста задатка
$x + 10 = 2 \cdot (y + 10)$

$x + y = 46$
$x + 10 = 2y + 20$ непознате пребацујемо на једну, познате на другу страну једнакости

$x + y = 46$
$x - 2y = 10$ /(-1) 2. једначину множимо са -1

$x + y = 46$
$-x + 2y = -10$ и додајемо је првој

$3y = 36$ елиминисали смо x, па можемо да одредимо y
$y = 12$
$x + 12 = 46$ x ћемо одредити тако што y мењамо у првој једначини
$x = 34$

Дакле, мајка сада има 34 године а ћерка 12 година.

15. Један угао троугла је 95°. Одредити преостала два угла тог троугла ако се зна да је један од њих за 15° мањи од другог.

Ако је један угао троугла 95°, онда збир преостала два угла добијамо кад од 180° одузмемо 95°. Дакле
$\alpha + \beta = 180^\circ - 95^\circ$
$\alpha + \beta = 85^\circ$

Добили смо једну једначину, а како каже у задатку да је један угао за 15 степени мањи од другог, то је
$\alpha - \beta = 15^\circ$

Оформимо систем:

$\alpha + \beta = 85^\circ$ сабраћемо једначине како би елиминисали β и одредили α
$\alpha - \beta = 15^\circ$

$2\alpha = 100^\circ \rightarrow \alpha = \frac{100^\circ}{2} \rightarrow \alpha = 50^\circ$ сада оно што смо добили мењамо у првој једначини
$\alpha + \beta = 85^\circ$
$50^\circ + \beta = 85^\circ$
$\beta = 85^\circ - 50^\circ$
$\beta = 35^\circ$

Тражени углови имају 50 и 35 степени.

16. Гаусовим методом решити систем једначина:

$x - y + 3z = 20$
$-3x + 4y + 2z = -7$
$-x + 2y + z = -2$

Решење: Прво ћемо проучити коефицијенте уз x: имамо 1, -3 и -1. Да би коефицијент у првој једначини (1) био супротан коефицијенту у другој (-3), треба да га помножимо са 3. За трећу једначину не морамо ништа да радимо, јер су коефицијенти већ супротни.

Дакле, да би неутралисали x из друге и треће једначине, прво ћемо прву помножити са 3 и додати другој, а затим прву без множења додати трећој:

$x - y + 3z = 20$
$-3x + 4y + 2z = -7$
$-x + 2y + z = -2$
$x - y + 3z = 20$
$y + 11z = 53$
$y + 4z = 18$

Добили смо једну једначину са три непознате и две једначине са по две непознате. Сада понављамо поступак за другу и трећу једначину, да би елиминисали y из треће:

$x - y + 3z = 20$
$y + 11z = 53$ другу једначину множимо са -1 и додајемо је трећој
$y + 4z = 18$
$x - y + 3z = 20$ прву и другу једначину преписујемо а уместо треће пишемо
$y + 11z = 53$ оно што смо добили када смо 2. помножили са -1
$-7z = -35$ и додали је 3. једначини

Одавде, радом „уназад“ рачунамо z, заменом добијамо y и на крају x:

$-7z = -35 \Longrightarrow z = 5$ прво z мењамо у 2. једначини да добијемо y
$y + 11 \cdot 5 = 53 \Longrightarrow y = 53 - 55 = -2$ сада y и z мењамо у 1. једначини до добијемо x
$x - (-2) + 3 \cdot 5 = 20 \Longrightarrow x = 20 - 2 - 15 = 3$

Дакле, решење је (x, y, z) = (3, -2, 5).

17. Гаусовим методом решити систем једначина:

$x - 3y + 4z = 14$ прву без множења сабирамо са другом, јер су уз x супротни коеф.
$-x + 2y - 5z = -13$ а прву помножену са -2 додајемо 3. да бисмо добили супротне
$2x + 5y - 3z = -5$ коефицијенте
$x - 3y + 4z = 14$
$-y - z = 1$
$11y - 11z = -33$

$x - 3y + 4z = 14$

$-y - z = 1$ сада 2. једначину множимо са 11 и додајемо је трећој да ми елиминисали y

$-22z = -22$ одавде одредимо z а даље заменама у 2. и 1. једначини одређујемо x и y

$z = 1$

$-y - 1 = 1 \Longrightarrow y = -2$

$x - 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 14 \Longrightarrow x + 6 + 4 = 14 \Longrightarrow x = 4$

Дакле, решење је (x, y, z) = (4, -2, 1).

18. Гаусовим методом решити систем једначина:

$x + y + z = 5$ прву једначину множимо са -5 и додајемо другој

$5x + 5y + 5z = 20$

$2x + 3y - z = 8$

$x + y + z = 5$

$0 = -5$

Пошто смо добили нетачну једнакост (0 = –5) , овај систем нема решења.