АЛГЕБАРСКЕ СТРУКТУРЕ

Дефиниција: Нека је G непразан скуп. Свако пресликавање $f: G \times G \to G$ назива се бинарна операција у скупу G.

- Ако се уређени пар (a,b) помоћу f пресликава у c онда се то бележи са $f(a,b)=c$ или $afb=c$. У алгебри се уместо f користе ознаке за операције као што су : $+,-,:,\circ,\div,\cdot,*,\Delta$.

Дефиниција: Групоид је најједноставнији пример алгебарске структуре. Нека је G непразан скуп и „$\circ$“ бинарна операција у G. **Групоид је** уређени пар $(G,\circ)$ за који важи затвореност тј. за свака два елемента a и b скупа G важи да је и $a \circ b \in G$.

Пример: Уређени парови $(N,+),(N,\cdot)$ су групоиди. Овде су посматране операције сабирања и множења у скупу природних бројева. Како знамо да је збир као и производ два произвољна природна броја природан број (операције сабирања и множења су затворене операције у скупу природних бројева), на основу тога закључујемо да су $(N,+),(N,\cdot)$ групоиди. Операције одузимање и дељење нису затворене у скупу природних бројева (разлика било која два природна броја, као и количник не мора да буде природан број нпр. $3-6=-3 \notin N$), што значи да уређени парови $(N,-),(N,:)$ нису групоиди. Операције одузимање и дељење кажемо да су делимично дефинисане у скупу природних бројева.

Дефиниција: Нека је G непразан скуп. За операцију „$\circ$“ у скупу G кажемо да је:

- **Комутативна** ако важи $a \circ b = b \circ a \quad (\forall a,b \in G)$
- **Асоцијативна** ако важи $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad (\forall a,b,c \in G)$

Дефиниција: Нека су на непразном скупу G дефинисане две операције „$\circ$“ и „$*$“. Ако је

$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$ онда кажемо да је операција „$\circ$“ **лево дистрибутивна** према операцији „$*$“, а **десно дистрибутивна** ако важи $(a * b) \circ c = (a * b) \circ (a * c)$ за $(\forall a,b,c \in G)$

Дефиниција: Групоид $(G,\circ)$ је **асоцијативни групоид** или **полугрупа** или **семи група** ако је „$\circ$“ асоцијативна операција.

Дефиниција: За елемент $e \in G$ кажемо да је неутрални елемент групоида $(G,\circ)$ ако важи

$a \circ e = e \circ a = a, \quad \forall a \in G.$

Теорема: У групоиду $(G,\circ)$ постоји највише један неутрални елемент.

Дефиниција: Полугрупа $(G,\circ)$ која има неутрални елемент назива се **моноид**.

Дефиниција: Нека је $(G,\circ)$ моноид. За елемент a^{-1} кажемо да је инверзни елемент елемента a ако важи $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Дефиниција: Уређени пар $(G,\circ)$ је **група** ако су задовољене аксиоме затворености, асоцијативности, ако има неутрални и инверзни елемент.

Дефиниција: Група је моноид у којем сваки елемент има инверз.

Дефиниција: Група $(G,\circ)$ зове се **Абелова** или **комутативна група** ако је операција „$\circ$" комутативна.

Дефиниција: Уређена тројка $(G,+,\circ)$ назива се **прстен** ако је:

1) $(G,+)$ комутативна група
2) $(G,\circ)$ полугрупа
3) „+" дистрибутивна у односу на „$\circ$"

ЗАДАЦИ

1. Нека је к фиксиран природан број већи од 1. Ако су „*" и „$\circ$" бинарне операције у скупу N одређене са $m * n = m + kn$ и $m \circ n = kmn$. Испитати да ли су ове операције комутативне, асоцијативне, а затим испитати да ли је операција „$\circ$" дистрибутивна према операцији „*".

Решење:

<u>Комутативност операције</u> „*"

$$m * n = n * m$$

$m * n = m + kn$

$n * m = n + km$ Закључујемо да операција ,,*“ није комутативна.

$m * n = n * m$ комутативни закон

Решава се лева страна једнакости $m * n = m + kn$

Решава се десна страна једнакости $n * m = n + km$

Упореде се резултати леве и десне стране једнакости и закључује да комутативност не важи.

Комутативност операције ,,$\circ$“

$$m \circ n = n \circ m$$

$m \circ n = kmn$
$n \circ m = knm$ Очигледно је да комутативни закон важи.

Асоцијативност операције ,,*“

$$(m * n) * p = m * (n * p)$$

$(m * n) * p = (m * n) + kp = m + kn + kp$

$m * (n * p) = m + k(n * p) = m + k(n + kp) = m + kn + k^2 p$ Асоцијативност не важи.

Асоцијативност операције ,,$\circ$“

$$(m \circ n) \circ p = m \circ (n \circ p)$$

$(m \circ n) \circ p = k(m \circ n)p = k(kmn)p = k^2 mnp$
$m \circ (n \circ p) = km(n \circ p) = km(knp) = k^2 mnp$ Асоцијативност важи.

Дистрибутивност операције ,,$\circ$“ према операцији ,,*“

$$m \circ (n * p) = (m \circ n) * (m \circ p)$$

$m \circ (n * p) = km(n * p) = km(n + kp) = kmn + k^2 mp$

$(m \circ n) * (m \circ p) = (m \circ n) + k(m \circ p) = kmn + k(kmp) = kmn + k^2 mp$ Важи дистрибутивни закон.

2. Нека је G скуп реалних бројева, и нека је операција „$\circ$“ дефинисана са

$$a \circ b = \frac{1}{2}(a + b) \quad \text{за } (\forall a, b \in G).$$

Испитати да ли је алгебарска структура $(G, \circ)$ полугрупа.

Решење: Да би алгебарска структура била полугрупа потребно је да важи затвореност и асоцијативност.

1) Затвореност
   Нека су $(a, b \in G)$, како је и $a \circ b \in G$ то значи да је затвореност задовољена.

2) Асоцијативност

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

$$(a \circ b) \circ c = \frac{1}{2}((a \circ b) + c) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a + b) + c\right) = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c$$

$$a \circ (b \circ c) = \frac{1}{2}(a + (b \circ c)) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{2}(b + c)\right) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c$$

Како резултати леве и десне стране једнакости нису једнаки то значи да асоцијативност не важи.

Како важи затвореност то значи да је уређени пар $(G, \circ)$ групоид, како смо доказали да асоцијативност не важи то значи да $(G, \circ)$ није полугрупа.

3. У скупу реалних бројева дефинисана је бинарна операција „*“ на следећи начин:

$$a * b = ab + 2a + 2b + 2$$

Испитати да ли је $(R, *)$ група. Да ли је $(R, *)$ Абелова група?

Решење:

Затвореност

Нека су $a, b \in R$ онда је и $(a * b) \in R$ што значи да важи затвореност. Ако важи затвореност онда је $(R,*)$ групоид.

<u>Асоцијативност</u>

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$
$$(a * b) * c = (a * b)c + 2(a * b) + 2c + 2 = (ab + 2a + 2b + 2)c + 2(ab + 2a + 2b + 2) + 2c + 2$$
$$= abc + 2ac + 2bc + 2c + 2ab + 4a + 4b + 4 + 2c + 2$$
$$= abc + 2ac + 2bc + 2ab + 4a + 4b + 4c + 6$$

$$a * (b * c) = a(b * c) + 2a + 2(b * c) + 2 = a(bc + 2b + 2c + 2) + 2a + 2(bc + 2b + 2c + 2) + 2$$
$$= abc + 2ab + 2ac + 2a + 2a + 2bc + 4b + 4c + 4 + 2$$
$$= abc + 2ab + 2ac + 2bc + 4a + 4b + 4c + 6$$

Асоцијативност важи.

Ако важи затвореност и асоцијативност онда је $(R,*)$ полугрупа (семигрупа).

<u>Неутрални елемент</u>

$a * e = e * a = a$ $\qquad$ e је неутрални елемент

$$a * e = a$$
$$ae + 2a + 2e + 2 = a$$
$$ae + 2e = a - 2a - 2$$
$$e(a + 2) = -a - 2$$
$$e(a + 2) = -(a + 2)$$
$$e = -\frac{a + 2}{a + 2}$$
$$e = -1$$

Десни неутрални елемент.

$a * e = e * a = a$

Леви неутрални елемент

Десни неутрални елемент

$$e * a = a$$
$$ea + 2e + 2a + 2 = a$$
$$ea + 2e = a - 2a - 2$$
$$e(a+2) = -a - 2$$
$$e(a+2) = -(a+2)$$
$$e = -\frac{a+2}{a+2}$$
$$e = -1$$

Леви неутрални елемент.

Да би неутрални елемент постојао потребно је да леви неутрални елемент има исту вредност као и десни неутрални елемент.

Како смо добили исте вредности за леви и десни неутрални елемент то значи да неутрални елемент постоји и $e = -1$.

Како вази затвореност, асоцијативност и постоји неутрални елемент то значи да је $(R,*)$ моноид.

Инверзни елемент

$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ $\qquad$ a^{-1} је инверзни елемент елемента a

e је неутрални елемент који смо већ одредили

$$a * a^{-1} = e$$
$$a * a^{-1} = -1$$
$$aa^{-1} + 2a + 2a^{-1} + 2 = -1$$
$$aa^{-1} + 2a^{-1} = -1 - 2 - 2a$$
$$a^{-1}(a+2) = -3 - 2a$$
$$a^{-1} = \frac{-2a-3}{a+2}$$
$$a^{-1} = -\frac{2a+3}{a+2}$$

Инверзни елемент постоји.

Ако је задовољена затвореност, асоцијативност, постоји неутрални и инверзни елемент онда је $(R,*)$ група.

Комутативност

$a*b=b*a$

$$a*b=ab+2a+2b+2$$
$$b*a=ba+2b+2a+2$$

Важи комутативност.

Ако важи затвореност, асоцијативност, неутрални, инверзни елемент и ако важи комутативност тада је $(R,*)$ комутативна или Абелова група.

4. Нека је групоид $(G,\cdot)$ коначан и дат следећом Келијевом таблицом. Испитати да ли је $(G,\cdot)$ комутативна група.

.	***a***	***b***	***c***
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Решење:

Затвореност

Затвореност свакако важи зато што је у задатку дато да је $(G,\cdot)$ групоид (код групоида је задовољена затвореност).
Када се из Келијеве таблице испитује затвореност потребно је да у таблици фигуришу само елементи који су у заглављу таблице (a,b,c).

.	***a***	***b***	***c***
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Заглавље таблице је означено црвеном бојом.

Асоцијативност

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$b \cdot c = a \cdot a$

$a = a$

.	**a**	**b**	**c**
a	*a*	*b*	*c*
b	*b*	*c*	*a*
c	*c*	*a*	*b*

Асоцијативност важи.

Неутрални елемент

.	**a**	**b**	**c**
a	*a*	*b*	*c*
b	*b*	*c*	*a*
c	*c*	*a*	*b*

Неутрални елемент се тражи у пресеку врсте и колоне у којима је распоред елемената исти као у заглављу таблице. Овде се види да је елемент a у пресеку што значи да је он неутрални елемент.

Инверзни елемент

За елемент a његов инверз је a

За елемент b његов инверз је c

За елемент c његов инверз је b.

Комутативност

$\cdot$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{a}$	a	b	c
$\boldsymbol{b}$	b	c	a
$\boldsymbol{c}$	c	a	b

Главна дијагонала је представљена стрелицом.

Ако је Келијева таблица симетрична у односу на главну дијагоналу онда важи комутативни закон. У овом случају комутативност је задовољена.

Како важи затвореност, асоцијативност, неутрални, инверзни елемент и комутативни закон то значи да је $(G,\cdot)$ Абелова или комутативна група.