НАЈВЕЋИ ЗАЈЕДНИЧКИ ДЕЛИЛАЦ И НАЈМАЊИ ЗАЈЕДНИЧКИ САДРЖАЛАЦ

Теорема (Основна теорема аритметике): Сваки сложен природан број може се написати као производ простих бројева:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$

- Неки од чинилаца могу бити једнаки, ако те чиниоце групишемо онда сваки природан број можемо представити у облику:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$$

Представљање бројева на овај начин назива се **канонично**.

Пример: $14 = 2 \cdot 7$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$
$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

Дефиниција: Највећи заједнички делилац неколико бројева је највећи број којим су дељиви сви дати бројеви.

- Највећи заједнички делилац за неколико бројева *a, b, c,...* означава се са $(a,b,c,\ldots)$ или једноставно са *NZD (a,b,c,...)*.

Теорема: Највећи заједнички делилац два или више бројева једнак је производу најмањих степена заједничких простих чинилаца који се јављају у каноничним разлагањима датих бројева.

У пракси тражење највећег заједничког делиоца два или више бројева састоји се из два корака:

1. Одреди се канонично разлагење датих бројева.
2. Тражи се производ само заједничких простих чинилаца који се јављају у овим разлагањима на најмањи могући степен.

Пример: Наћи највећи заједнички делилац за бројеве 720 и 840.

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
45	3
15	3
5	5
1	

840	2
420	2
210	2
105	3
35	5
35	5
7	7
1	

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$(720, 840) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5 = 8 \cdot 15 = 120.$$

- Највећи заједнички делилац два броја може се одредити и помоћу **Еуклидовог алгоритма.**

Дефиниција: Ако је највећи заједнички делилац два броја једнак 1 онда се за те бројеве каже да су **узајамно прости.**

Пример: Методом Еуклидовог алгоритма наћи највећи заједнички делилац бројева 420 и 360.

Решење: 420:360 = 1

<u>-360</u>

$60 = r_1 \neq 0$

360 : 60 = 6

<u>-360</u>

$0 = r_2$

NZD(420, 360) = 60

Тражи се количник бројева 420 и 360, добије се остатак $60 = r_1 \neq 0$. Како је остатак различит од нуле наставља се поступак дељења делиоца 360 и добијеног остатка 60. Поступак дељења се наставља све док се у неком кораку не добије да је остатак једнак нули. Највећи заједнички делилац је последњи остатак различит од нуле.

Дефиниција: Најмањи заједнички садржалац бројева *a, b, c,...* је најмањи број који је дељив свим датим бројевима.

- Најмањи заједнички садржалац означавамо са $[a,b,c,...]$ или *NZS (a,b,c,..)*.

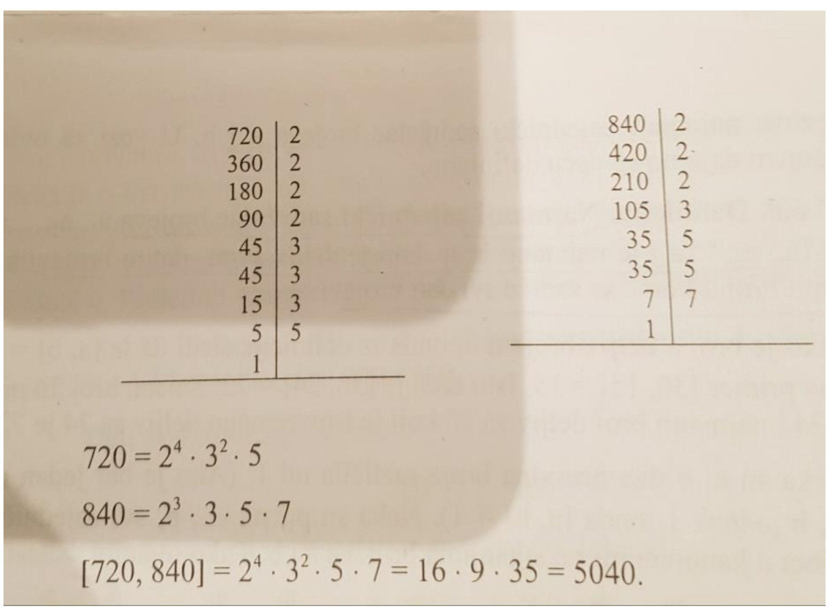
Теорема: Најмањи заједнички садржалац два или више бројева једнак је производу највећих степена свих простих чинилаца заједничких или не, који се јављају у каноничним разлагањима датих бројева.

- У пракси тражење најмањег заједничког садржаоца два или више бројева састоји се из два корака:
  1. Одреди се канонично разлагање датих бројева
  2. Тражи се производ свих простих чиниоца заједничких или не који се јављају у овим разлагањима и узимају се њихови највећи могући степени.

Теорема: Производ највећег заједничког делиоца и најмањег заједничког садржаоца два броја једнак је производу тих бројева.

$$(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b \quad \text{или} \quad NZD(a,b)\cdot NZS(a,b)=a\cdot b$$

Пример: Наћи најмањи заједнички садржалац за бројеве 720 и 840.



720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
45	3
15	3
5	5
1	

840	2
420	2
210	2
105	3
35	5
35	5
7	7
1	

$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$[720, 840] = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 16 \cdot 9 \cdot 35 = 5040.$

ЗАДАЦИ

1. Наћи:
   a) NZD(12, 20)
   b) NZD (630, 693, 231)

Решење:

a)

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$$

NZD(12, 20) = 4

b)

$$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$693 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$$
$$231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$$

NZD(630, 693, 231) = 21

2. Наћи:
   a) NZS(4, 12, 16, 48)
   b) NZS(240, 396, 420)

Решење:

a)

$$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$$
$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$
$$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$$
$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$$

NZS(4, 12, 16, 48) = 48

b)

$$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$$
$$396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$$
$$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

NZS(240, 396, 420) = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 55440$

3. Три штапа дужине 48 cm, 60 cm и 90 cm треба исећи на комаде једнаких дужина тако да буду максималне могуће дужине. Колико таквих комада можемо добити?

   Решење:

   $48 = 2^4 \cdot 3$

   $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ NZD(48, 60, 90) = 6 Штапови треба да буду дужине 6 cm.

   $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

   48:6 =8 Од првог штапа се добија 8 комада дужине 6 cm.
   60 : 6 = 10 Од другог штапа се добије 10 комада дужине 6 cm.
   90 : 6 =15 Од трећег штапа се добије 15 комада дужине 6 cm.

   Укупно се добије 8+10+15 = 33 комада.

4. Од 24 руже, 60 каранфила и 72 гербера направљен је највећи могући број једнаких букета. Колико ће бити таквих букета и колико ће коштати сваки букет ако је цена руже 140 динара, каранфила 150 динара и гербера 200 динара.

   Решење:

   $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

   $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ NZD(24, 60, 72) =12 букета.

   $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

   24 : 12 = 2 руже
   60 : 12 = 5 каранфила
   72 : 12 = 6 гербера

   $2 \cdot 140 + 5 \cdot 150 + 6 \cdot 200 = 2230$ динара. (У једном букету има 2 руже по 140 динара, 5 каранфила по 150 динара и 6 гербера по 200 динара).

5. Три атлетичара стартују истовремено на кружној стази. Први обиђе ту стазу за 10 минута, други за 12 минута а трећи за 15 минута. После колико минута ће се сва три атлетичара поново наћи на месту поласка?

   Решење:

   $10 = 2 \cdot 5$

   $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ NZS(10, 12, 15) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ минута.

   $15 = 3 \cdot 5$

6. Одреди најмањи природни број који при дељењу са 64 и 72 даје остатак 3.

   Решење: Најмањи број који при дељењу са 64 и 72 нема остатак је NZS тих бројева.

   $64 = 2^6$

   $72 = 2^3 \cdot 3^2$ NZS(64, 72) = $2^6 \cdot 3^2 = 576$

   Број који је за 3 већи од 576 је 579, то је најмањи број који при дељењу са 64 и 72 даје остатак 3.

7. Наћи најмањи заједнички садржалац за бројеве 144 и 54 без одређивања каноничног разлагања датих бројева.

   Решење:

$$NZD(a,b) \cdot NZS(a,b) = a \cdot b \quad \text{(на основу Теореме)}$$

   NZD(a,b) можемо да одредимо применом Еуклидовог алгоритма (јер нам није дозвољено канонично разлагање).

   144 : 54 = 2
   <u>-108</u>
   $36 = r_1 \neq 0$

   54 : 36 =1
   <u>-36</u>
   $18 = r_2 \neq 0$

   36 :18 = 2
   <u>-36</u>
   $r_3 = 0$ Последњи остатак различит од нуле је $r_2 = 18$ и то је NZD(144,54) = 18.

   Сада из $NZD(a,b) \cdot NZS(a,b) = a \cdot b$ следи да је

$$NZS(a,b)=\frac{a\cdot b}{NZD(a,b)}=\frac{144\cdot 54}{18}=432.$$

8. Доказати да су бројеви 673 и 421 узајамно прости бројеви применом Еуклидовог алгоритма.

Решење:

Два броја су узајамно проста ако је њихов највећи заједнички делилац једнак 1.

673 :421 = 1
<u>-421</u>
252= $r_1 \neq 0$

421 : 252 = 1
<u>-252</u>
169 = $r_2 \neq 0$

252 : 169 = 1
<u>-169</u>
83= $r_3 \neq 0$

169 : 83 = 2
<u>-166</u>
3 = $r_4 \neq 0$

83 : 3 =27
<u>-81</u>
2 = $r_5 \neq 0$

3 : 2 =1
<u>-2</u>
1 = $r_6 \neq 0$ $\Longrightarrow$ Последњи остатак различит од нуле је 1.

2 : 1 = 2
<u>-2</u>
0 = r_7 NZD(673, 421) = 1 Бројеви 673 и 421 су узајамно прости.