Глава 1

Реалне функције реалне променљиве

1.1 Преглед дефиниција и теорема

Нека су дати непразни скупови X и Y, Декартов производ $X \times Y$ скупова X и Y је скуп свих уређених парова (x, y), где прва компонента x припада скупу X, а друга компонента y припада скупу Y, тј.

$$X \times Y = \{(x, y)|x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Кажемо да је дата функција која пресликава скуп X у скуп Y ако је по неком правилу сваком елементу скупа X придружен један и само један елемент скупа Y.

Дефиниција 1.1. *Подскуп f скупа $X \times Y$ зове се* ***функција*** *(или пресликавање) из скупа X у скуп Y ако се свако $x \in X$ појављује тачно једанпут као прва компонента међу елементима скупа f.*

Скуп $\mathcal{D}(f) = X$ је скуп свих првих компоненти уређених парова скупа $X \times Y$ и зове се домен или област дефинисаности функције f. Скуп Y зове се кодомен функције f. Скуп свих слика пресликавања $f : X \to Y$ зове се скуп вредности функције и означава се са $\mathcal{R}(f) = \{f(x)|x \in X\} \subset Y$.

Чињеница да $(x, y) \in f$ записује се и на следећи начин $y = f(x)$. При томе се x назива независна променљива или оригинал, а y зависна променљива или слика.

Дефиниција 1.2. *Функција* f *која има особину*

1) $(\forall x_1, x_2 \in X) \;\; x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
зове се ***ињекција*** *(или пресликавање 1-1),*

2) $\mathcal{R}(f) = Y$
зове се ***сурјекција*** *(или пресликавање на).*

Ако функција f *поседује и особину 1) и особину 2), тада се она зове* ***бијекција****.*

Користећи закон контрапозиције из математичке логике особину 1) можемо изразити и на следећи еквивалентан начин:

$$1') \qquad (\forall x_1, x_2 \in X) \;\; f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Дефиниција 1.3. *Нека су* X, Y *и* Z *непразни скупови и* $f : X \to Y$ *и* $g : Y \to Z$ *две функције. Тада је са* $h(x) = g(f(x))$ *за свако* $x \in X$*задата функција* $h : X \to Z$ *која се зове* ***сложена функција*** *(или композиција) функција* f *и* g*.*

За овако дефинисану функцију користи се ознака $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Дефиниција 1.4. *Нека је* $f : X \to Y$ *дата функција. Ако постоји функција* $f^{-1} : \mathcal{R}(f) \to X$*, таква да важи*

$$(\forall x \in X)(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \tag{1.1}$$
$$(\forall y \in \mathcal{R}(f))(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y \tag{1.2}$$

тада функцију f^{-1} *називамо* ***инверзном функцијом*** *функције* f*.*

Следећа теорема даје потребан и довољан услов за егзистенцију инверзне функције и утврђује њену јединственост.

Теорема 1.1. *Функција* $f : X \to Y$ *има инверзну функцију ако и само ако је* f *ињекција. Ако је* f *ињекција, тада је њена инверзна функција јединствена.*

Дефиниција 1.5. *Под* ***реалном функцијом*** *реалне променљиве подразумевамо сваку функцију* $f : A \to \mathbb{R}$ *дефинисану на неком подскупу* A *скупа* $\mathbb{R}$ *реалних бројева и са вредностима у* $\mathbb{R}$*.*

За неке скупове бројева, које ћемо често користити, усвојене су следеће ознаке:

$\mathbb{N}$ - скуп свих природних бројева $\{1, 2, 3, \dots\}$;

$\mathbb{Z}$ - скуп свих целих бројева $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$;

$\mathbb{Q}$ - скуп свих рационалних бројева $\left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$;

$\mathbb{I}$ - скуп свих ирационалних бројева;

$\mathbb{R}$ - скуп свих реалних бројева;

$\mathbb{C}$ - скуп свих комплексних бројева.

Реалне функције реалне променљиве могу бити задате на више начина. Један од најинтересантнијих и најчешћих начина задавања функција јесте помоћу одговарајућег аналитичког израза $f(x)$, на пример

$$f(x) = x^2 + 2.$$

Поред наведеног, тзв. експлицитног, задавања функција понекад се користи и параметарско задавање, табеларно...

Ако је вредност функције $f(x)$ у тачки $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ таква да је $f(x_0) = 0$ кажемо да је x_0 ***нула*** функције f.

Са функцијама се могу изводити разне алгебарске операције:

$$\begin{aligned}
(\forall x \in \mathcal{D}(f \pm g))\ (f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x); \\
(\forall x \in \mathcal{D}(f \cdot g))\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x); \\
\left(\forall x \in \mathcal{D}\left(\frac{f}{g}\right)\right)\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}.
\end{aligned}$$

Неке важне особине функција

Дефиниција 1.6. *Ако је* $A \subset \mathcal{D}(f)$ *и*

$$(\forall x_1, x_2 \in A)\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \tag{1.3}$$

каже се да је функција f ***расшућа*** *на скуџу* A*, а ако*

$$(\forall x_1, x_2 \in A)\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \tag{1.4}$$

каже се да је функција f ***сшроīо расшућа*** *на скуџу* A.

Аналогно, ако

$$(\forall x_1, x_2 \in A)\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \tag{1.5}$$

каже се да је функција f ***оџадајућа*** на скупу A, а ако

$$(\forall x_1, x_2 \in A)\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \tag{1.6}$$

каже се да је функција f ***сшроīо оџадајућа*** на скупу A.

Теорема 1.2. *Свака сшроīо расшућа (сшроīо оџадајућа) функција* $f : A \to \mathbb{R}$ *има инверзну функцију, која је шакође сшроīо расшућа (сшроīо оџадајућа).*

Дефиниција 1.7. *За функцију* $f : A \to \mathbb{R}$ *дефинисану на симешричном скуџу* $A \subset \mathbb{R}$ *кажемо да је* ***џарна*** *ако*

$$(\forall x \in A) \quad f(-x) = f(x), \tag{1.7}$$

а да је ***неџарна*** *ако*

$$(\forall x \in A) \quad f(-x) = -f(x). \tag{1.8}$$

Ово значи да је график парне функције симетричан у односу на y-осу, а график непарне функције симетричан у односу на координатни почетак.

Ова особина олакшава цртање графика таквих функција, јер је довољно испитати функцију на позитивном делу области дефинисаности, а затим симетричним пресликавањем у односу на y-осу или координатни почетак добити график у целој области дефинисаности.

Дефиниција 1.8. *Функција $f : A \to \mathbb{R}$ је* ***периодична*** *ако постоји константа $p \neq 0$ таква да важи:*

$$(\forall x \in A) \quad (x + p \in A \wedge f(x+p) = f(x)). \tag{1.9}$$

Константа p за коју важи (1.9) зове се ***период*** функције. Основни примери периодичних функција су тригонометријске функције ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$), константна функција $f(x) = c$, итд.

Дефиниција 1.9. *Функција $f : A \to \mathbb{R}$ је* ***ограничена одозго*** *на скупу A ако постоји реалан број M такав да је*

$$(\forall x \in A) \;\; f(x) \leq M,$$

а ***ограничена одоздо*** *на скупу A ако постоји реалан број m такав да је*

$$(\forall x \in A) \;\; f(x) \geq m.$$

Уколико постоје истовремено оба броја m и M тако да је

$$(\forall x \in A) \;\; m \leq f(x) \leq M,$$

за функцију f кажемо да је ***ограничена*** на скупу A. Ограничена функција има график који се налази између правих $y = m$ и $y = M$.

Најмање горње ограничење функције $f : A \to \mathbb{R}$ (уколико постоји) називамо ***супремумом функције*** и означавамо га са $\sup_{x \in A} f(x)$. Највеће доње ограничење функције $f : A \to \mathbb{R}$ (уколико постоји) називамо ***инфимумом функције*** и означавамо га са $\inf_{x \in A} f(x)$.

Основне елементарне функције

Основне елементарне функције су:

1. Константне функције ($y = c, c \in \mathbb{R}$).

2. Степене функције

Степене функције су облика $y = x^n, n \in \mathbb{N}$ и дефинисане су за свако реално x, тј $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Ако је n паран број ова функција има следеће особине: ненегативна је, парна, строго опадајућа на $(-\infty, 0]$, а строго растућа на $(0, +\infty]$. Ако је n непаран број функција је непарна, строго растућа и негативна на $(-\infty, 0)$, а позитивна на $(0, +\infty)$. Функција $y = x^n$ има једну нулу $x = 0$.

На основу Теореме 1.2. за степену функцију постоји инверзна која је такође строго растућа на интервалу (0, $+\infty$]. Та функција се назива ***корена функција*** и означава се са $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$. График функције $y = \sqrt[n]{x}$ можемо лако нацртати користећи симетричност графика функција f и f^{-1} у односу на праву $y = x$.

3. Експоненцијалне и логаритамске функције

Нека је $a > 0$ и $a \neq 1$. Функција $y = a^x$ дефинисана за свако $x \in (-\infty, +\infty)$ зове се експоненцијална функција са основом a. За ову функцију је $\mathcal{R}(f) = (0, +\infty)$.

Експоненцијална функција је строго растућа за $a > 1$, а строго опадајућа за $0 < a < 1$. Постоји инверзна функција за ову функцију $f^{-1} : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ која се означава са $y = log_a x$ (чита се логаритам x за основу a) и зове се ***логаритамска функција***. Ова функција је такође строго растућа за $a > 1$, а строго опадајућа за $0 < a < 1$.

4. Тригонометријске функције

За функцију $y = \sin x$ област дефинисаности је $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ а $\mathcal{R}(f) = [-1, 1]$. Ова функција је непарна и периодична са основним периодом 2π.

За функцију $y = \cos x$ област дефинисаности је $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ а $\mathcal{R}(f) = [-1, 1]$. Ова функција је парна и периодична са основним периодом 2π.

За функцију $y = \operatorname{tg} x$ област дефинисаности је $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, неограничена је и одозго и одоздо, непарна је и периодична са основним периодом π.

За функцију $y = \operatorname{ctg} x$ област дефинисаности је $x \neq k\pi$, неограничена је и одозго и одоздо, непарна је и периодична са основним периодом π.

Под елементарном функцијом се подразумевају оне функције које се добијају из основних елементарних функција применом коначно много пута алгебарских операција $+, -, \cdot, :$ и операција слагања функција.

Истакнимо неке посебно значајне класе елементарних функција:

1. Елементарна функција облика:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

где је $n \in \{0, 1, \dots\}$ и $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \dots, n\}$ зове се ***полином са реалним коефицијентима***. Очигледно је $\mathcal{D}(P) = \mathbb{R}$.

2. Елементарна функција облика:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где су $P(x)$ и $Q(x)$ полиноми са реалним коефицијентима зове се ***рационална функција***. Очигледно је $\mathcal{D}(R) = \mathbb{R} \setminus A$, где је A скуп нула полинома $Q(x)$.

1.2 Задаци

1.1. Наћи област дефинисаности функције:

$$y = \sqrt{\log_2 \frac{2x-1}{x+2}}.$$

Решење. Функција $y = \sqrt{f(x)}$ је дефинисана за $f(x) \geq 0$, па је због тога

$$\log_2 \frac{2x-1}{x+2} \geq 0.$$

Такође, функција $\log_2 f(x)$ је дефинисана за $f(x) > 0$. Тј. мора да буде испуњен и услов да је

$$\frac{2x-1}{x+2} > 0.$$

Дакле, област дефинисаности функције јесте скуп решења неједначина

$$\log_2 \frac{2x-1}{x+2} \geq 0 \quad \text{и} \quad \frac{2x-1}{x+2} > 0.$$

За прву неједначину је:

$$\begin{aligned}
\log_2 \frac{2x-1}{x+2} \geq 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \log_2 \frac{2x-1}{x+2} \geq \log_2 1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+2} \geq 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{2x-1}{x+2} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1-x-2}{x+2} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{x-3}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x-3 \geq 0 \\
& \wedge \quad\ x+2 \geq 0 \quad \vee \quad x-3 \leq 0 \ \wedge \ x+2 \leq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad x \geq 3 \ \wedge \ x \geq -2 \quad \vee \quad x \leq 3 \ \wedge \ x \leq -2 \\
& \Leftrightarrow \quad x \geq 3 \quad \vee \quad x \leq -2.
\end{aligned}$$

За другу неједначину скуп решења је:

$$
\begin{aligned}
\frac{2x-1}{x+2} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x-1>0 \ \wedge x+2>0 \ \vee \ 2x-1<0 \wedge x+2<0 \\
&\Leftrightarrow \quad x>\frac{1}{2} \wedge x>-2 \ \vee \ x<\frac{1}{2} \wedge x<-2 \\
&\Leftrightarrow \quad x>\frac{1}{2} \ \vee \ x<-2.
\end{aligned}
$$

Очигледно, тражећи пресек добијених области добијамо да је за дату функцију област дефинисаности

$$D_f=(-\infty,-2)\cup[3,+\infty).$$

1.2. Наћи $f(x)$ ако је $f\left(\dfrac{x-3}{2x+4}\right)=\dfrac{x+1}{3x-1}$.

Решење. Уводимо смену $\dfrac{x-3}{2x+4}=t$. Одавде је:

$$
\begin{aligned}
x-3 &= t(2x+4) \\
x-2tx &= 4t+3 \\
x(1-2t) &= 4t+3 \\
x &= \frac{4t+3}{1-2t}.
\end{aligned}
$$

Дакле, биће:

$$f(t)=\frac{\dfrac{4t+3}{1-2t}+1}{3\dfrac{4t+3}{1-2t}-1}=\frac{\dfrac{4t+3+1-2t}{1-2t}}{\dfrac{12t+9-1+2t}{1-2t}}=\frac{2t+4}{14t+8}=\frac{t+2}{7t+4},$$

односно

$$f(x)=\frac{x+2}{7x+4}.$$

1.3. Наћи $f(x)$ ако је $f\left(\dfrac{2x+2}{x+3}\right)=\dfrac{4x+1}{2x-3}$.

Решење. Уводимо смену $\dfrac{2x+2}{x+3}=t$. Одавде је:

$$\begin{aligned}2x+2 &= t(x+3)\\ 2x-tx &= 3t-2\\ x(2-t) &= 3t-2\\ x &= \frac{3t-2}{2-t}.\end{aligned}$$

Дакле, биће:

$$f(t)=\frac{4\dfrac{3t-2}{2-t}+1}{2\dfrac{3t-2}{2-t}-3}=\frac{\dfrac{12t-8+2-t}{2-t}}{\dfrac{6t-4-6+3t}{2-t}}=\frac{11t-6}{9t-10},$$

односно

$$f(x)=\frac{11x-6}{9x-10}.$$

1.4. Наћи $f(x)$ ако је $f\left(\dfrac{x+2}{3x+5}\right)=\dfrac{x+4}{2x-1}$.

Решење. Уводимо смену $\dfrac{x+2}{3x+5}=t$. Одавде је:

$$\begin{aligned}x+2 &= t(3x+5)\\ x-3tx &= 5t-2\\ x(1-3t) &= 5t-2\\ x &= \frac{5t-2}{1-3t}.\end{aligned}$$

Дакле, биће:

$$f(t)=\frac{\dfrac{5t-2}{1-3t}+4}{2\dfrac{5t-2}{1-3t}-1}=\frac{\dfrac{5t-2+4-12t}{1-3t}}{\dfrac{10t-4-1+3t}{1-3t}}=\frac{-7t+2}{13t-5},$$

односно

$$f(x)=\frac{-7x+2}{13x-5}.$$

1.5. Наћи $f(x)$ ако је $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\dfrac{x-2}{x+2}$.

Решење. Уводимо смену $\dfrac{x+1}{x-1}=t$. Одавде је:

$$\begin{aligned} x+1 &= t(x-1) \\ x-tx &= -t-1 \\ x(1-t) &= -t-1 \\ x &= \frac{-t-1}{1-t}=\frac{t+1}{t-1}. \end{aligned}$$

Дакле, биће:

$$f(t)=\frac{\dfrac{t+1}{t-1}-2}{\dfrac{t+1}{t-1}+2}=\frac{\dfrac{t+1-2t+2}{t-1}}{\dfrac{t+1+2t-2}{t-1}}=\frac{-t+3}{3t-1},$$

односно

$$f(x)=\frac{-x+3}{3x-1}.$$

1.6. Ако је $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ доказати да је $\dfrac{f(x)-f(y)}{1+f(x)f(y)}=\dfrac{x-y}{xy+1}$.

Решење. Пођимо од леве стране једнакости:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(y)}{1+f(x)f(y)} &= \frac{\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{y-1}{y+1}}{1+\dfrac{x-1}{x+1}\dfrac{y-1}{y+1}}=\frac{\dfrac{(x-1)(y+1)-(y-1)(x+1)}{(x+1)(y+1)}}{\dfrac{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)}} \\ &= \frac{xy+x-y-1-xy-y+x+1}{xy+x+y+1+xy-x-y+1}=\frac{2x-2y}{2xy+2}=\frac{x-y}{xy+1}. \end{aligned}$$

1.7. Функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дефинисане су на следећи начин:

$$f(x)=2x+1,\ g(x)=3x+5.$$

Одредити: $(g\circ f)(1),\ (g\circ f)(-2),\ (g\circ f)(a),\ (f\circ g)(a+1)$.

Решење.

$$\begin{aligned} (g\circ f)(x) &= g\left(f(x)\right)=g(2x+1)=3(2x+1)+5=6x+8, \\ (f\circ g)(x) &= f\left(g(x)\right)=f(3x+5)=2(3x+5)+1=6x+11, \\ (g\circ f)(1) &= 6\cdot 1+8=14, \\ (g\circ f)(-2) &= 6(-2)+8=-12+8=-4, \\ (g\circ f)(a) &= 6a+8, \\ (f\circ g)(a+1) &= 6(a+1)+11=6a+17. \end{aligned}$$

1.8. Дате су функције

$$f(x)=x^2+1,\;\; g(x)=2-x.$$

Формирати функције $(f\circ g)$ и $(g\circ f)$, након тога израчунати: $(f\circ g)\left(\frac{1}{2}\right)$, $(g\circ f)\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Решење.

$$\begin{aligned}
(f\circ g)(x) &= f\left(g(x)\right)=f(2-x)=(2-x)^2+1=x^2-4x+5,\\
(g\circ f)(x) &= g\left(f(x)\right)=g(x^2+1)=2-(x^2+1)=1-x^2,\\
(f\circ g)\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+5=\frac{1}{4}-2+5=\frac{13}{4},\\
(g\circ f)\left(-\frac{2}{3}\right) &= 1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}.
\end{aligned}$$

1.9. Дате су функције $f(x)=2x+1$ и $g(x)=3x+a$, $a\in\mathbb{R}$.

1) Одредити a тако да функције $(f\circ g)$ и $(g\circ f)$ буду једнаке.

2) Наћи $(f\circ f)$ и $(g\circ g)$ за тако добијено a.

Решење.

1) Обе функције су линеарне, па су дефинисане на целом $\mathbb{R}$, а такве су и сложене функције $(f\circ g)$, $(g\circ f)$, $(f\circ f)$, и $(g\circ g)$ (за $a\in\mathbb{R}$). Тада је довољно наћи $a\in\mathbb{R}$ такво да је

$$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)\;\;(\forall x\in\mathbb{R}),$$

односно:

$$\begin{aligned}
f\left(g(x)\right)=g\left(f(x)\right) &\Leftrightarrow f(3x+a)=g(2x+1)\\
&\Leftrightarrow 2(3x+a)+1=3(2x+1)+a\\
&\Leftrightarrow 6x+2a+1=6x+3+a\\
&\Leftrightarrow a=2.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
(f\circ f)(x) &= f(2x+1)=2(2x+1)+1=4x+3,\\
(g\circ g)(x) &= g(3x+2)=3(3x+2)+2=9x+8.
\end{aligned}$$

1.10. Ако је $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, тада је $f\left(f(x)\right) = x$. Доказати.

Решење.

$$
\begin{aligned}
(f \circ f)(x) &= f\left(f(x)\right) = f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = \frac{2 \cdot \dfrac{2x+1}{x-2} + 1}{\dfrac{2x+1}{x-2} - 2} \\
&= \frac{\dfrac{4x+2+x-2}{x-2}}{\dfrac{2x+1-2x+4}{x-2}} = \frac{\dfrac{5x}{x-2}}{\dfrac{5}{x-2}} = \frac{5x}{5} = x.
\end{aligned}
$$

1.11. Ако је $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, тада је $\dfrac{f(x)-f(y)}{1+f(x)f(y)} = \dfrac{x-y}{1+xy}$. Доказати.

Решење. Како је $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, то је $f(y) = \dfrac{y-1}{y+1}$. Сада имамо да је

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(y)}{1+f(x)f(y)} &= \frac{\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{y-1}{y+1}}{1 + \dfrac{x-1}{x+1}\dfrac{y-1}{y+1}} = \frac{\dfrac{(x-1)(y+1)-(y-1)(x+1)}{(x+1)(y+1)}}{\dfrac{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)}} \\
&= \frac{(x-1)(y+1)-(y-1)(x+1)}{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)} \\
&= \frac{xy+x-y-1-(xy+y-x-1)}{xy+x+y+1+xy-x-y+1} \\
&= \frac{2x-2y}{2xy+2} = \frac{x-y}{1+xy}.
\end{aligned}
$$

1.12. Нека је $f(x) = ax^2 + bx + c$ тада је

$$f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) = 0.$$

Доказати.

Решење.

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2+bx+c,\\
f(x+3) &= a(x+3)^2+b(x+3)+c = a(x^2+6x+9)+b(x+3)+c\\
&= ax^2+6ax+bx+9a+3b+c,\\
f(x+2) &= a(x+2)^2+b(x+2)+c = a(x^2+4x+4)+b(x+2)+c\\
&= ax^2+4ax+4a+bx+2b+c,\\
f(x+1) &= a(x+1)^2+b(x+1)+c = a(x^2+2x+1)+b(x+1)+c\\
&= ax^2+2ax+a+bx+b+c.
\end{aligned}$$

Сада имамо да је

$$\begin{aligned}
f(x+3) &- 3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)=\\
&= ax^2+6ax+9a+bx+3b+c-3ax^2-12ax-12a\\
&- 3bx-6b-3c+3ax^2+6ax+3a+3bx+3b+3c-ax^2\\
&- bx-c=0.
\end{aligned}$$

1.13. Наћи, ако постоји инверзну функцију функције $f(x)=\ln 3x$.

Решење. Функција $f(x)$ има инверзну функцију ако и само ако је инјекција. Проверимо да ли је дата функција инјекција. Претпоставимо да x_1 и x_2 припадају области дефинисаности, и нека је:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \ln 3x_1=\ln 3x_2.$$

Како је функција $\ln x$ инјекција то је:

$$3x_1=3x_2\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow f(x)\quad \text{је инјекција.}$$

Из овога следи да постоји инверзна функција коју означавамо са f^{-1}. Тада је

$$(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=x,$$

односно

$$\ln 3f^{-1}(x)=x.$$

Сада је

$$3f^{-1}(x)=e^x\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{e^x}{3}.$$

Проверимо:

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(\ln 3x)=\frac{e^{\ln 3x}}{3}=\frac{3x}{3}=x.$$

1.14. Наћи (ако постоји) инверзну функцију функције $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

Решење. Као и у претходном задатку испитајмо прво да ли је дата функција инјекција.

Нека су x_1 и x_2 из области дефинисаности, и нека је $f(x_1) = f(x_2)$. Тада је:

$$\begin{aligned}
\frac{1-x_1}{1+x_1} &= \frac{1-x_2}{1+x_2} \\
1 - x_1 + x_2 - x_1x_2 &= 1 + x_1 - x_2 - x_1x_2 \\
-x_1 + x_2 &= x_1 - x_2 \\
2x_2 &= 2x_1 \\
x_1 &= x_2 \Rightarrow f \quad \text{јесте инјекција.}
\end{aligned}$$

Значи постоји инверзна функција f^{-1} функције $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ и важи

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$

$$\frac{1 - f^{-1}(x)}{1 + f^{-1}(x)} = x$$

$$\frac{1 - f^{-1}(x) - x - f^{-1}(x) \cdot x}{1 + f^{-1}(x)} = 0$$

$$1 - x = f^{-1}(x)(1 + x)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

Очигледно је $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

1.15. Испитати парност (непарност) функција:

1) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$;

2) $f(x) = x^2 - 2x - 3$;

3) $f(x) = x^2 + \cos x$;

4) $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

Решење.

1) Функција је парна јер је

$$\begin{aligned} f(-x) &= \left((-x)+\frac{1}{(-x)}\right)^2 = \left((-1)\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)^2 \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = f(x). \end{aligned}$$

2) Функција није ни парна ни непарна јер је

$$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x) - 3 = x^2 + 2x - 3.$$

3) Функција је парна јер имамо да је

$$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x).$$

4) Дата функција је непарна јер је

$$f(-x) = \frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} = \frac{\dfrac{1}{e^x}+1}{\dfrac{1}{e^x}-1} = \frac{1+e^x}{1-e^x} = -\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right) = -f(x).$$

1.16. Скицирати график функције:

$$f(x) = |2-x| + |2+x|\,.$$

Решење.

а)

$$f(x) = |2-x|+|2+x| = \begin{cases} 2-x+2+x, & 2-x \geq 0 \quad \text{и} \quad 2+x \geq 0 \\ -2+x+2+x, & 2-x < 0 \quad \text{и} \quad 2+x \geq 0 \\ 2-x-2-x, & 2-x \geq 0 \quad \text{и} \quad 2+x < 0 \\ -2+x-2-x, & 2-x < 0 \quad \text{и} \quad 2+x < 0 \end{cases}$$

Када се све израчуна добијамо на крају (слика 1.1):

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x < 2 \\ 4, & -2 \leq x \leq 2 \\ 2x, & 2 < x \end{cases}$$

1.17. Наћи област дефинисаности функција:

1) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$;

2) $y = \dfrac{x-5}{x^2-3x+2}$;

3) $y = \sqrt{-4+5x-x^2}$;

4) $y = \ln(x^2-1)$;

5) $y = \arccos \dfrac{2}{2+x}$.

Решење.

1) Рационална функција није дефинисана када је именилац једнак нули тј. именилац мора бити различит од нуле, односно $1+x^2 \neq 0$. Како је

$$x^2 \geq 0 \ \Rightarrow 1+x^2 \geq 1 > 0,$$

за свако $x \in \mathbb{R}$, следи $D(f) = (-\infty, +\infty)$.

2) Аналогно претходном примеру, y није дефинисано за $x^2-3x+2 = 0$. Како је

$$\begin{aligned}
x^2-3x+2 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
x_{1/2} &= \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{3\pm 1}{2} \\
&\Rightarrow x_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \wedge x_2 = \frac{3-1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Ово значи да је $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{1,2\}$.

3) Корена функција

$$y = \sqrt{-(x^2-5x+4)} = \sqrt{-(x-4)(x-1)} = \sqrt{(4-x)(x-1},$$

дефинисана је за ненегативне вредности аргумента, тј:

$$\begin{aligned}
(4-x)(x-1) &\geq 0 \\
&\Leftrightarrow (4-x) \geq 0 \wedge (x-1) \geq 0 \Rightarrow x \in [1,4], \\
&\vee \ (4-x) \leq 0 \wedge (x-1) \leq 0 \Rightarrow x \in \emptyset.
\end{aligned}$$

Одавде следи да је $D(f) = [1,4]$.

4) Функција $y = \ln g(x)$, где је $g(x) = x^2 - 1$, је логаритамска и дефинисана је само за строго позитивне вредности аргумента, што значи да је $x^2 - 1 > 0$.

$$
\begin{aligned}
x^2 - 1 &= (x-1)(x+1) > 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1) > 0 \wedge (x+1) > 0 \Rightarrow x \in (1, +\infty), \\
&\vee \quad (x-1) < 0 \wedge (x+1) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1).
\end{aligned}
$$

На крају $g(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Дакле

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

5) Функција $y = \arccos \dfrac{2}{2+x}$ је дефинисана за $\dfrac{2}{2+x} \in [-1, 1]$, тј. за $-1 \leq \dfrac{2}{2+x} \leq 1$, одавде добијамо:

$$\frac{2}{2+x} - 1 \leq 0 \ \text{ и } \ \frac{2}{2+x} + 1 \geq 0.$$

Односно:

$$\frac{2-2-x}{2+x} \leq 0 \ \text{ и } \ \frac{2+2+x}{2+x} \geq 0.$$

Сада је $\dfrac{-x}{2+x} \leq 0$ и $\dfrac{4+x}{2+x} \geq 0$. Решавањем ових неједначина добија се на крају

$$D(f) = (-\infty, -4] \cup [0, +\infty).$$

1.18. Наћи област дефинисаности функција:

1) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 2x + 4}$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{3-x}$;

3) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}$;

4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$;

5) $f(x) = \ln \dfrac{x}{x+1}$;

Решење.

1) Рационална функција $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-2x+4}$ је дефинисана за

$$x^2 - 2x + 4 \neq 0,$$

(именилац различит од нуле). Како је

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 4 &= 0 \\ x_{1/2} &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}. \end{aligned}$$

Очигледно је да дата једначина нема реалних решења што значи да је

$$D(f) = (-\infty, +\infty).$$

2) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 3 - x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

3) Аналогно претходним задацима потребно је да је $x^3 - 5x^2 + 6x \neq 0$. Како је

$$x^3 - 5x^2 + 6x = x(x^2 - 5x + 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$$

Добијамо да је

$$D(f) = \mathbb{R} \mid \{0, 2, 3\} = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty).$$

4) Корена функција дефинисана је за ненегативне вредности аргумента па закључујемо да је

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x^2+1}{x-1} \geq 0 \right\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x - 1 > 0\} = (1, +\infty).$$

5) Како је логаритамска функција дефинисана само за строго позитивне вредности аргумента, и како је рационална функција дефинисана када је именилац различит од нуле имамо да је:

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{x}{x+1} > 0 \,\wedge\, x + 1 \neq 0 \right\} = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty).$$

1.19. Наћи реалне нуле и испитати знак функција:

1) $y = x^3 + 1$;

2) $y = 1 - e^{1-x}$.

Решење.

1) Функција се може написати као:

$$y = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

Квадратни трином $x^2 - x + 1$ нема реалних нула (дискриминанта је негативна), па је $x^2 - x + 1 > 0$, на целом $\mathbb{R}$. Тада,

$$\begin{aligned} y = 0 \quad &\Rightarrow \quad x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1, \\ y < 0 \quad &\Rightarrow \quad x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1), \\ y > 0 \quad &\Rightarrow \quad x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x \in (-1, +\infty). \end{aligned}$$

2) Област дефинисаности функције је

$$D(y) = (-\infty, +\infty),$$

а њене нуле су

$$y = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow e^{1-x} = 1 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Знак проверавамо директно. Функција има сталан знак на интервалима $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$.

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 - e^{1-0} = 1 - e < 0 \Rightarrow y < 0 \text{ на } (-\infty, 1), \\ y(2) &= 1 - e^{1-2} = 1 - \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow y > 0 \text{ на } (1, +\infty). \end{aligned}$$