Глава 1

Одређени интеграл и примене

Нека је функција $f(x)$ дефинисана и непрекидна на сегменту $[a, b]$ (тада је на истом сегменту и ограничена). Нека је $f(x)$ на сегменту $[a, b]$ и ненегативна. Сада је потребно израчунати површину равног лика T ограниченог графиком функције $y = f(x)$, x-осом и правим $x = a, x = b$ (тзв. **криволинијски трапез**). Начин решавања проблема је следећи:

поделимо сегмент $[a, b]$ на n делова тачкама $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ где је $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} = b$, узмимо онда у сваком од подсегмената $[x_{i-1}, x_i], (i = 1, 2, \dots, n)$ произвољну тачку ξ_i, а затим израчунајмо вредност $f(\xi_i)$ функције f у свим међутачкама $\xi_i, (i = 1, 2, \dots, n)$. На крају, формирајмо интегрални збир:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \triangle x_i,$$

где су $\triangle x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1, 2, \dots, n)$ дужине подсегмената $[x_{i-1}, x_i]$.

Нека сада $\max\limits_{1 \le i \le n} \triangle x_i \to 0$. Ако при томе збир I_n тежи одређеној граничној вредности I, која не зависи ни од начина поделе сегмента $[a, b]$ на подсегменте, ни од избора међутачака $\xi_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ у тим подсегментима, онда се број I назива **површином** посматраног криволинијског трапеза T. Тада имамо да је

$$I = \max_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \triangle x_i. \tag{1.1}$$

Формула (1.1) у ствари датој функцији f дефинисаној на сегменту $[a, b]$ придружује број I. Та операција назива се **одређеном интеграци-**

јом функције на сегменту $[a, b]$, а њен резултат, ако постоји, назива се **одређеним интегралом** функције f на сегменту $[a, b]$ и означава са

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \triangle x_i (= I).$$

За функцију f каже се тада да је **интеграбилна** на сегменту $[a, b]$. Бројеви a и b називају се при том **доњом** и **горњом границом** одређеног интеграла, а $[a, b]$ **интервалом интеграције**.

НАПОМЕНА: Дефиниција одређеног интеграла $\int_a^b f(x)dx$ подразумева да је $a < b$. Међутим, одређени интеграл се може дефинисати и за случај када је $a \geq b$. Тада је по конвенцији:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \quad a > b; \quad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Такође, при егзистенцији $\int_{-a}^{a} f(x)dx$, за непарну функцију $f(x)$ важи $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, а за парну $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Њутн-Лајбницова формула

Ако је функција $f(x)$ непрекидна на сегменту $[a, b]$, тада она има примитивну функцију $\int f(x)dx = F(x) + C$ и важи једнакост

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ово је основна формула интегралног рачуна.

Особине одређеног интеграла

Основне особине одређеног интеграла дате су следећом теоремом:

ТЕОРЕМА 1.1. *1) Ако постоје одређени интеграли* $\int_a^c f(x)dx$ *и* $\int_c^b f(x)dx$, *онда постоји и одређени интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *и важи једнакост:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

(адитивност по интервалу интеграције);

2) Ако постоје одређени интеграли $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$, онда постоји и одређени интеграл $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx$ и важи једнакост:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

*(**адитивност по подинтегралној функцији**);*

3) Ако постоји одређени интеграл $\int_a^b f(x)dx$ онда за свако $k \in \mathbb{R}$ постоји и одређени интеграл $\int_a^b [kf(x)]dx$ и важи једнакост:

$$\int_a^b [kf(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx,$$

*(**својство хомогености**).*

Примена одређеног интеграла

1) Ако је функција $f(x)$ непрекидна на сегменту $[a,b]$ и ако је $f(x) \geq 0$, тада је површина криволинијског трапеза (слика 6.2) ограниченог луком криве, правама $x=a, x=b$ и одсечком x-осе за $x \in [a,b]$ дата обрасцем

$$P_{ab} = \int_a^b f(x)dx.$$

2) Ако је функција $f(x)$ непрекидна на сегменту $[a,b]$ и ако је $f(x) \leq 0$, тада је површина криволинијског трапеза (слика 6.3) дата обрасцем

$$P_{ab} = \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$$

3) Нека су дате две функције $y=f(x)$ и $y=g(x)$ чији се графици секу у тачкама са апсцисама $x=a$ и $x=b$ ($a<b$) и нека је испуњена неједнакост $f(x) \geq g(x)$ за свако x из сегмента $[a,b]$. Површина лика ограниченог графицима датих функција на сегменту $[a,b]$ (слика 6.4) дата је формулом:

$$P_{ab} = \int -a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x)-g(x))dx.$$

4) Запремина тела насталог ротацијом криволинијског трапеза омеђеног кривом $y = f(x)$, осом Ox, правама $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$ око осе Ox (слика 6.5) израчунава се обрасцем

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

5) Запремина тела насталог ротацијом лика омеђеног кривом $x = g(y)$, правама $x = 0, y = c$ и $y = d(c < d)$ око осе Oy (слика 6.6) израчунава се обрасцем

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$$

6) Запремина тела насталог ротацијом лика омеђеног кривама $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $(f_1(x) \leq f_2(x))$ и правама $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$ око осе Ox израчунава се обрасцем

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx.$$

7) Дужина s лука глатке криве $y = f(x)$, између две тачке са апсцисама $x = a$ и $x = b, (a < b)$, износи

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Применом Њутн Лајбницове формуле израчунати:

1.1. $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx.$

Решење. Да би решили овај одређени интеграл уводимо смену и истовремено мењамо и границе :

$$\begin{aligned} x^2 + x + 3 = t \quad &\Rightarrow \quad (2x+1)dx = dt \\ &\Rightarrow \quad x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 3 \ \wedge \ x_2 = 3 \Rightarrow t_2 = 15 \end{aligned}$$

па интеграл постаје

$$\int_3^{15} \frac{dt}{t} = \ln t|_3^{15} = \ln 15 - \ln 3 = \ln \frac{15}{3} = \ln 5.$$

1.2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x + 3\sin x)dx.$

Решење. Интеграл решавамо директно:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x + 3\sin x)dx &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= 2\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(1-0) - 3(0-1) = 5.\end{aligned}$$

1.3. $\int_1^2 x \ln x dx.$

Решење. Интеграл решавамо методом парцијалне интеграције при чему се не мења вредност граница:

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln x dx &= \left| \begin{array}{cc} u = \ln x & dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx \\ &= \frac{1}{2}(4\ln 2 - 0) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}|_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

1.4. Наћи површину ограничену луком криве $y = x^2 + x + 1$, правама $x = 0, x = 1$ и $y = 0$.

Решење.

$$P = \int_0^1 (x^2 + x + 1)dx = \frac{x^3}{3}|_0^1 + \frac{x^2}{2}|_0^1 + x|_0^1 = \frac{11}{6}.$$

1.5. Израчунати површину ограничену кривим $y = \sin x, y = \cos x$ и одсечком $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, x осе.

Решење.

$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\
&= \sin x|_0^{\frac{\pi}{4}} + \cos x|_0^{\frac{\pi}{4}} - \cos x|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \sin x|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) - \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 2(\sqrt{2} - 1).
\end{aligned}
$$

1.6. Наћи запремину тела које настаје ротацијом дела површи ограничене кривим $y = x^2(1 - x^2), y = 0$ око x-осе.

Решење. Тачке у којима крива $y = x^2(1 - x^2)$ сече x-осу добијамо изједначавањем функције са нулом, па решавањем добијамо да је $x_{1,2} = 0, x_3 = 1, x_4 = -1$. Дакле, користећи образац за израчунавање запремине, добијамо:

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1}^{1} x^4(1 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} x^4(1 - 2x^2 + x^4) dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^6 + x^8) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5}|_{-1}^{1} - 2\frac{x^7}{7}|_{-1}^{1} + \frac{x^9}{9}|_{-1}^{1} \right) \\
&= \pi \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{7} + \frac{2}{9} \right) = \frac{32\pi}{315}.
\end{aligned}
$$

1.7. Наћи дужину лука криве $y = \ln(\cos x)$ између тачака са апсцисама $x = 0, x = \dfrac{\pi}{4}$.

Решење. Извод функције $y = \ln(\cos x)$ је

$$
y' = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.
$$

Користећи образац за израчунавање дужине лука криве, добијамо:

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx.
\end{aligned}
$$

После увођења смене

$$\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$$

мењају се и границе па је $x = 0 \Rightarrow t = 0 \wedge x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Дакле, даље је:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| |_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} - \ln 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}. \end{aligned}$$