Глава 1

Неодређени и одређени интеграл и примене

1.1 Преглед дефиниција и теорема

Примитивна функција и неодређени интеграл

Један од основних задатака у диференцијалном рачуну је налажење извода дате функције. Разноврсни проблеми у математици доводе до обрнутог задатка: наћи функцију чији је извод једнак датој функцији.

Дефиниција 1.1. *Нека је функција $f(x)$ дефинисана на интервалу (a, b). За функцију $F(x)$, дефинисану на истом интервалу, кажемо да је* ***примитивна функција*** *функције $f(x)$ ако за свако $x \in (a, b)$ постоји извод и ако је*

$$F'(x) = f(x).$$

Поступак одређивања примитивне функције дате функције назива се **интегрирање** дате функције. Операција интегрирања је инверзна операцији диференцирања.

Теорема 1.1. *Ако је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$, онда је $F(x)+C$ такође примитивна функција функције $f(x)$ где је C произвољна константа.*

Дефиниција 1.2. *Ако је функција $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$, онда се скуп функција $F(x)+C$, где је C произвољна константа, назива* ***неодређеним интегралом*** *функције $f(x)$ и означава са $\int f(x)dx$, тј.*

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функција $f(x)$ се при томе назива подинтегралном функцијом, израз $f(x)dx$ подинтегралним изразом, а x променљивом интеграције.

Најједноставније и најчешће коришћене особине неодређеног интеграла су:

$$1) \qquad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx;$$

$$2) \qquad \int dF(x) = F(x) + C;$$

$$3) \qquad \int Af(x)dx = A\int f(x)dx, \quad (A = const);$$

$$4) \qquad \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Таблица основних неодређених интеграла

$$1) \qquad \int dx = x + C;$$

$$2) \qquad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \;\; (\alpha \neq -1);$$

$$3) \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$4) \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$5) \qquad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$6) \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$7) \qquad \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$8) \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$9)\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$10)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$11)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C;$$

$$12)\quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$13)\quad \int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arcctg} x + C;$$

$$14)\quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C;$$

$$15)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C.$$

Основне методе интеграције

1) Метода смене: Нека је $x = \varphi(t)$, где је t нова промењива и φ диференцијабилна функција ($\varphi(t) \neq 0$). Тада је

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt. \tag{1.1}$$

Функција φ одређује се тако да десна страна формуле (1.1) добије погодан облик за интеграцију.

2) Метода парцијалне интеграције: Ако су u и v диференцијабилне функције од x на неком интервалу, онда на том истом интервалу важи следећа једнакост:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Интеграција рационалних функција

Интеграција рационалне функције после издвајања целог дела своди се на интеграцију правог рационалног разломка $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где су $P(x)$ и $Q(x)$ полиноми, при чему је изложилац бројиоца $P(x)$ мањи од изложиоца имениоца $Q(x)$.

Ако је

$$Q(x) = (x-a)^k (x^2 + px + q)^e,$$

где је a реалан вишеструк корен полинома $Q(x)$, а $\alpha \pm \beta i$ вишеструки комплексни корени, онда се рационална функција раставља на парцијалне разломке:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{M_1 + N_1 x}{x^2 + px + q} + \cdots + \\ &+ \frac{M_e + N_e x}{(x^2 + px + q)^e}.\end{aligned}$$

Непознати коефицијенти $A_1, A_2, \ldots, A_k, M_1, N_1, \ldots, M_e, N_e$ се одређују методом неодређених коефицијената.

1.2 Задаци

Применом методе смене израчунати следеће интеграле:

1.1. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx.$

Решење. Уводимо смену $x^2 + x + 3 = t \ \Rightarrow\ (2x+1)dx = dt$, па је:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2 + x + 3| + C.$$

1.2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}.$

Решење. Интеграл решавамо увођењем смене $\sqrt{2-5x} = t \ \Rightarrow\ 2 - 5x = t^2 \ \Rightarrow\ dx = -\dfrac{2}{5} t dt$, па је:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} = -\frac{2}{5} \int dt = -\frac{2}{5} t + C = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} + C.$$

1.3. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

Решење. Уводимо смену $\sqrt{x} = t \ \Rightarrow\ x = t^2 \ \Rightarrow\ dx = 2tdt$, па је:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^t}{t} 2tdt = 2\int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

1.4. $\int e^{-\frac{5}{2}x}dx.$

Решење. Интеграл решавамо увођењем смене $-\dfrac{5}{2}x = t \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{2}{5}x \;\Rightarrow$ $dx = -\dfrac{2}{5}dt$, па је:

$$\int e^{-\frac{5}{2}x}dx = -\frac{2}{5}\int e^t dt = -\frac{2}{5}e^t + C = -\frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}x} + C.$$

1.5. $\int x^2 e^{x^3}dx.$

Решење. Интеграл решавамо увођењем смене $x^3 = t \;\Rightarrow\; 3x^2dx = dt \;\Rightarrow$ $x^2dx = \dfrac{dt}{3}$, па је:

$$\int x^2 e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

1.6. $\int \dfrac{\ln x}{x}dx.$

Решење. Код овог интеграла уводимо смену:

$$\ln x = t \;\Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$$

па интеграл постаје:

$$\int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

1.7. $\int \sin\sqrt{x}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}.$

Решење. Уводимо смену:

$$\sqrt{x} = t \;\Rightarrow x = t^2 \;\Rightarrow dx = 2tdt$$

па интеграл постаје:

$$\int \sin t \frac{2tdt}{t} = 2\int \sin tdt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

1.8. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx.$

Решење. Уводимо смену $1+2\sin x = t \Rightarrow 2\cos x dx = dt$, па интеграл постаје

$$\int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\ln t + C = \frac{1}{2}\ln(1+2\sin x) + C.$$

1.9. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx.$

Решење. Уводимо смену $\sin x = t \ \Rightarrow\ \cos x dx = dt$, па је:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx = \int \frac{dt}{t^5} = \frac{t^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4\sin^4 x} + C.$$

1.10. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x dx.$

Решење.

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx.$$

Код овог интеграла уводимо смену:

$$\cos x = t \ \Rightarrow -\sin x dx = dt \ \Rightarrow\ \sin x dx = -dt$$

па интеграл постаје

$$\int \frac{-dt}{t} = -\ln t + C = -\ln\cos x + C.$$

1.11. $\displaystyle\int \frac{x-2}{x+3}dx.$

Решење. Интеграл решавамо увођењем смене $x+3=t \ \Rightarrow\ x = t-3 \ \Rightarrow$ $dx = dt$, па је:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{x+3}dx &= \int \frac{t-5}{t}dt = \int dt - 5\int \frac{dt}{t} = t - 5\ln t + C\\ &= x+3-5\ln(x+3) + C.\end{aligned}$$

1.12. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{3-x^2}}dx.$

Решење. Код овог интеграла уводимо смену:

$$\sqrt{3-x^2}=t \ \Rightarrow 3-x^2=t^2 \ \Rightarrow -2xdx=2tdt \ \Rightarrow \ xdx=-tdt$$

па интеграл постаје

$$\int \frac{-tdt}{t}=\int -dt=-t+C=-\sqrt{3-x^2}+C.$$

1.13. $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Решење.

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=I_1+I_2,$$

$$I_1=\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x.$$

За други интеграл I_2 уводимо смену $\sqrt{1-x^2}=t \ \Rightarrow \ 1-x^2=t^2 \ \Rightarrow$ $x^2=1-t^2 \ \Rightarrow \ 2xdx=-2tdt \ \Rightarrow \ xdx=-tdt$, па је:

$$I_2=\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{-tdt}{t}=-\int dt=-t=-\sqrt{1-x^2}.$$

Дакле, решење је:

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C.$$

1.14. $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^3-8}\cdot x^2dx.$

Решење. Уводимо смену:

$$\sqrt[3]{x^3-8}=t \ \Rightarrow x^3-8=t^3 \ \Rightarrow 3x^2dx=3t^2dt \ \Rightarrow \ x^2dx=t^2dt$$

па интеграл постаје

$$\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{4}(\sqrt[3]{x^3-8})^4+C.$$

1.15. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx.$

Решење. Интеграл решавамо увођењем смене $\sqrt{1+\ln x} = t \ \Rightarrow \ 1+\ln x = t^2 \ \Rightarrow \ \dfrac{dx}{x} = 2tdt$, па је:

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx = 2\int t^2 dt = \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} + C.$$

1.16. $\displaystyle\int \sin x \cos x dx$

Решење. Код овог интеграла уводимо смену:

$$\sin x = t \ \Rightarrow \cos x dx = dt$$

па интеграл постаје

$$\int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}(\sin x)^2 + C.$$

Применом методе парцијалне интеграције израчунати интеграле:

1.17. $\displaystyle\int \ln x dx.$

Решење.

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = x \end{array} \right| = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} \\ &= x\ln x - x + C. \end{aligned}$$

1.18. $\displaystyle\int x \ln x dx.$

Решење.

$$\begin{aligned} \int x\ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

1.19. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx.$

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x^2}dx &= \left| \begin{array}{ll} u=\ln x & dv=\frac{dx}{x^2} \\ du=\frac{dx}{x} & v=-\frac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{1}{x}\ln x + \int e\frac{dx}{x^2} \\ &= -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C.\end{aligned}$$

1.20. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx.$

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x^3}dx &= \left| \begin{array}{ll} u=\ln x & dv=\frac{dx}{x^3} \\ du=\frac{dx}{x} & v=\frac{x^{-2}}{-2}=-\frac{1}{2x^2} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} \\ &= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2x^2}) + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.\end{aligned}$$

1.21. $\int xe^x dx.$

Решење.

$$\int xe^x dx = \left| \begin{array}{ll} u=x & dv=e^x dx \\ du=dx & v=e^x \end{array} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

1.22. $\int \frac{x}{e^x}dx.$

Решење.

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{e^x}dx &= \left| \begin{array}{ll} u=x & dv=e^{-x}dx \\ du=dx & v=-e^{-x} \end{array} \right| = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + C.\end{aligned}$$

1.23. $\int x^2e^x dx.$

Решење.

$$\begin{aligned}\int x^2e^xdx &= \left|\begin{array}{cc} u=x^2 & dv=e^xdx \\ du=2xdx & v=e^x\end{array}\right| = x^2e^x-2\int xe^xdx \\ &= \left|\begin{array}{cc} u=x & dv=e^xdx \\ du=dx & v=e^x\end{array}\right| = x^2e^x \\ &- 2\left(xe^x-\int e^xdx\right)+C = x^2e^x-2xe^x+2e^x+C.\end{aligned}$$

1.24. $\int x\cos x dx.$

Решење.

$$\begin{aligned}\int x\cos xdx &= \left|\begin{array}{cc} u=x & dv=\cos xdx \\ du=dx & v=\sin x\end{array}\right| = x\sin x-\int \sin xdx \\ &= x\sin x+\cos x+C.\end{aligned}$$

1.25. $\int x\sin x dx.$

Решење.

$$\begin{aligned}\int x\sin xdx &= \left|\begin{array}{cc} u=x & dv=\sin xdx \\ du=dx & v=-\cos x\end{array}\right| = -x\cos x+\int \cos xdx \\ &= -x\cos x+\sin x+C.\end{aligned}$$

1.26. $\int (1-x)\sin x dx.$

Решење.

$$\begin{aligned}\int (1-x)\sin xdx &= \left|\begin{array}{cc} u=1-x & dv=\sin xdx \\ du=-dx & v=-\cos x\end{array}\right| \\ &= -(1-x)\cos x-\int x\cos xdx \\ &= (x-1)\cos x-\sin x+C.\end{aligned}$$

1.27. $\int x^2 \sin x dx$

Решење.

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin x dx &= \left| \begin{array}{cc} u = x^2 & dv = \sin x dx \\ du = 2x dx & v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = x & dv = \cos x dx \\ du = dx & v = \sin x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + \\
&+ 2\left(x \sin x - \int \sin x dx \right) + C = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.
\end{aligned}$$

1.28. $\int x^2 \cos x dx.$

Решење.

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos x dx &= \left| \begin{array}{cc} u = x^2 & dv = \cos x dx \\ du = 2x dx & v = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{array} \right| = x^2 \sin x - \\
&- 2\left(-x \cos x + \int \cos x dx \right) + C = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.
\end{aligned}$$

1.29. $\int \operatorname{arctg} x dx.$

Решење.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{arctg} x dx &= \left| \begin{array}{cc} u = \operatorname{arctg} x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} & v = x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{1+x^2} \\
&= x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.
\end{aligned}$$

1.30. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$

Решење.

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{arctg} x dx &= \left| \begin{array}{cc} u = \operatorname{arctg} x & dv = x dx \\ du = \dfrac{1}{1+x^2} dx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \\
&- \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \\
&= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} \right) = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \\
&- \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) + C = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \\
&+ C = \frac{1}{2}(x^2+1) \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

Израчунати интеграле следећих рационалних функција:

1.31. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+5x}$.

Решење. Подинтегрална функција може да се напише и у облику

$$\frac{1}{x^2+5x} = \frac{1}{x(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5},$$

при чему коефицијенте A и B треба одредити. Из последње једнакости добијамо:

$$1 \equiv A(x+5) + Bx,$$

а одавде је $A = \frac{1}{5}, B = -A = -\frac{1}{5}$. Дакле, сада интеграл постаје:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+5x} &= \int \frac{dx}{x(x+5)} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+5} \\
&= \frac{1}{5} \ln |x| - \frac{1}{5} \ln |x+5| + C = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x}{x+5} \right| + C.
\end{aligned}$$

1.32. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-3x+2} dx$.

Решење. Дати интеграл је:

$$\int \frac{x^2}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{x^2-3x+2+3x-2}{x^2-3x+2} dx = \int \left(1 + \frac{3x-2}{x^2-3x+2} \right) dx.$$

Подинтегрална рационална функција може да се напише и у облику

$$\frac{3x-2}{x^2-3x+2} = \frac{3x-2}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1},$$

јер су 1 и 2 решења квадратне једначине $x^2+3x-2=0$. Коефицијенте A и B одређујемо из последње једнакости:

$$3x-2 \equiv A(x-1)+B(x-2),$$

а одавде је $A=4, B=-1$. Дакле, сада интеграл постаје:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^2-3x+2}dx &= \int \left(1+\frac{3x-2}{x^2-3x+2}\right)dx = \int dx + 4\int \frac{dx}{x-2} \\
&- \int \frac{dx}{x-1} = x + 4\ln|x-2| - \ln|x-1| + C \\
&= x + \ln\left|\frac{(x-2)^4}{x-1}\right| + C.
\end{aligned}$$

1.33. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+3}dx.$

Решење. Дати интеграл је:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4}{x^2+3}dx &= \int \frac{x^2(x^2+3)-3x^2}{x^2+3}dx = \int \left(x^2 + \frac{-3(x^2+3)+9}{x^2+3}\right)dx \\
&= \frac{x^3}{3} - 3x + 9\int \frac{dx}{x^2+3} = \frac{x^3}{3} - 3x + \frac{9}{\sqrt{3}}\int dx\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 \\
&= \frac{x^3}{3} - 3x + \frac{9}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

1.34. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+3x^2}dx.$

Решење. Подинтегрална рационална функција може да се напише и у облику

$$\frac{1}{x^4+3x^2} = \frac{1}{x^2(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}.$$

Коефицијенте A, B, C и D одређујемо из последње једнакости:

$$\begin{aligned}
1 &\equiv Ax(x^2+3) + B(x^2+3) + (Cx+D)x^2 \\
1 &\equiv A(x^3+3) + B(x^2+3) + Cx^3 + Dx^2 \\
1 &\equiv (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 3Ax + 3B
\end{aligned}$$

а одавде је

$$\begin{aligned}A+C &= 0\\ B+D &= 0\\ 3A &= 0\\ 3B &= 1\end{aligned}$$

Након израчунавања добијамо да је $A = 0, B = \frac{1}{3}, C = 0, D = -\frac{1}{3}$. Дакле, сада интеграл постаје:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4+3x^2}dx &= \int \frac{1}{x^2(x^2+3)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+3}\\ &= -\frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

1.35. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x-1)^3}dx.$

Решење. Подинтегрална рационална функција може да се напише и у облику

$$\frac{x+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}.$$

Коефицијенте A, B, C и D одређујемо из последње једнакости:

$$\begin{aligned}x+1 &\equiv A(x^3+3x^2+3x-1) + B(x^3-2x^2+x) + C(x^2-x) + Dx\\ x+1 &\equiv (A+B)x^3 + (-3A-2B+C)x^2 + (3A+B-C+D)x - A,\end{aligned}$$

а одавде је

$$\begin{aligned}A+B &= 0\\ -3A-2B+C &= 0\\ 3A+B-C+D &= 1\\ -A &= 1.\end{aligned}$$

Након израчунавања добијамо да је $A = -1, B = 1, C = -1, D = 2$. Дакле, сада интеграл постаје:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x(x-1)^3}dx &= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^3}\\ &= -\ln x + \ln(x-1) + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C\\ &= \ln\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C.\end{aligned}$$

Израчунати:

1.36. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^2+1}dx.$

Решење. Код овог интеграла сводимо подинтегралну функцију на праву рационалну функцију, па је:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{x^2+1}dx &= \int \frac{x^2+1+1}{x^2+1} = \int\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx = x+\int\frac{dx}{x^2+1}\\ &= x+\operatorname{arctg} x + C.\end{aligned}$$

1.37. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}dx.$

Решење. Овај интеграл решавамо једноставно растављањем на два чиниоца:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx &= \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int\frac{x^2+1}{x^2+1}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx\\ &= x-\operatorname{arctg} x + C.\end{aligned}$$

1.38. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^3}.$

Решење.

$$\int\frac{dx}{(x-2)^3}=\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^3}=\frac{d(x-2)^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2(x-2)^2}+C.$$

1.39. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x+5}}dx.$

Решење. Код овог интеграла уводимо смену:

$$\sqrt{2x+5}=t\ \Rightarrow 2x+5=t^2\ \Rightarrow x=\frac{t^2-5}{2}\ \Rightarrow dx=tdt$$

па интеграл постаје

$$\int\left(\frac{t^2}{2}-\frac{5}{2}\right)dt=\frac{t^3}{6}-\frac{5}{2}t+C=\left(\frac{2x+5}{6}-\frac{5}{2}\right)\sqrt{2x+5}+C.$$

1.40. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}dx.$

Решење. Овај интеграл решавамо рационализацијом:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}} &= \int \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}dx \\
&= \int \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}{x-1-x+2}dx = \int (\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})dx \\
&= \int \sqrt{x-1}d(x-1) + \int \sqrt{x-2}d(x-2) \\
&= \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} + \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2} + C.
\end{aligned}$$

1.41. $\displaystyle\int e^x \sin x dx.$

Решење. Означимо интеграл са I, тада је

$$\begin{aligned}
I &= \left| \begin{array}{cc} u = \sin x & dv = e^x dx \\ du = \cos x dx & v = e^x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = \cos x & dv = e^x dx \\ du = -\sin x dx & v = e^x \end{array} \right| \\
&= e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x dx) + C_1 \\
&= e^x \sin x - e^x \cos x - I + C_1.
\end{aligned}$$

Одавде је:

$$\begin{aligned}
2I &= e^x(\sin x - \cos x) + C_1 \\
I &= \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C,
\end{aligned}$$

где је $C + \dfrac{C_1}{2}$.

1.42. $\displaystyle\int e^x \cos x dx.$

Решење. Означимо интеграл са I, тада је

$$\begin{aligned}
I &= \left| \begin{array}{cc} u = \cos x & dv = e^x dx \\ du = -\sin x dx & v = e^x \end{array} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = sinx & dv = e^x dx \\ du = \cos x dx & v = e^x \end{array} \right| \\
&= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx) + C_1 \\
&= e^x \cos x + e^x \sin x - I + C_1.
\end{aligned}$$

Одавде је:

$$\begin{aligned}
2I &= e^x(\cos x + \sin x) + C_1 \\
I &= \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C,
\end{aligned}$$

где је $C = \dfrac{C_1}{2}$.