Асимптоте графика функције

При испитивању графика функције на границама интервала области дефинисаности и у тачкама прекида друге врсте, често се показује да се график функције неограничено приближава некој правој. Такве праве се називају асимптотама графика функције. Постоје три врсте праволинијских асимптота и то:

Дефиниција 0.1. *Права $x = x_0$ је* ***вертикална асимптота*** *графика функције $y = f(x)$ ако је бар једна од граничних вредности*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \quad \text{или} \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

бесконачна.

Дефиниција 0.2. *Права $y = b$ је* ***хоризонтална асимптота*** *графика функције $y = f(x)$ кад $x \to \infty$ ако је*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b.$$

Дефиниција 0.3. *Права $y = kx + n$ је* ***коса асимптота*** *графика функције $y = f(x)$ кад $x \to \infty$ ако је $k \neq 0$ и важи:*

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + n)] = 0.$$

Теорема 0.1. *График функције $y = f(x)$ има косу асимптоту $y = kx+n$ ако и само ако постоје:*

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx].$$

Шема за испитивање функције и цртање графика

Општа шема за испитивање функције и цртање њеног графика је:

1) налажење области дефинисаности функције;
2) испитивање парности и периодичности функције;
3) налажење асимптота графика функције;
4) налажење нула функције и испитивање знака функције;

5) налажење локалних екстремума функције и њених интервала монотоности;

6) налажење превојних тачака функције и њених интервала конвексности;

7) цртање графика функције.

0.1. За функцију $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$ одредити:

1) Вертикалне и хоризонталне асимптоте.

2) Екстремне вредности.

Решење.

1) Вертикалне асимптоте могу да постоје у тачкама у којима дата функција није дефинисана. У конкретном случају то су тачке $x = -2$ и $x = 2$. Провером утврђујемо да је

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}} = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}} = \infty,$$

па закључујемо да су $x = \pm 2$ вертикалне асимптоте дате функције.

Постојање хоризонталних асимптота утврђујемо на следећи начин:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}} = -1 \quad \wedge \quad \lim_{x\to \infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}} = 1,$$

па закључујемо да су праве $y = \pm 1$ хоризонталне асимптоте дате функције.

2) Стационарне тачке су нуле првог извода (а то су потенцијалне екстремне тачке):

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}\right)' = \frac{(x+1)'(\sqrt{x^2-4}) - (x+1)(\sqrt{x^2-4})'}{x^2-4} \\
&= \frac{\sqrt{x^2-4} - (x+1)\cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-4}}(x^2-4)'}{x^2-4} = \frac{\sqrt{x^2-4} - \dfrac{x(x+1)}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} \\
&= \frac{\dfrac{x^2-4-x^2-x}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{-(x+4)}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}.
\end{aligned}$$

Изједначавајући први извод са нулом, добијамо да је $x = -4$ и то је стационарна тачка. С обзиром да се знак првог извода у околини те тачке мења и то из $+$ у $-$, закључујемо да је та тачка екстремна и да је максимум.

0.2. Испитати особине и нацртати график функције

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x.$$

Решење. Дата функција је полиномна функција и то степена 3 и после сређивања може се написати у облику:

$$y = x\left(\frac{1}{3}x^2 - x - 3\right).$$

1) *Област дефинисаности:*

Полиномна функција је дефинисана за сваки реалан број, па је према томе

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.$$

2) *Парност и периодичност функције:*

Функција није периодична, а није ни парна ни непарна јер је:

$$f(-x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x = -\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right) \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$

3) *Асимптоте функције:*

Функција нема вертикалних асимптота, нити хоризонталних асимптота. Функција, такође нема ни косу асимптоту, јер је:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\frac{1}{3}x^2 - x - 3\right)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}x^2 - x - 3\right) = \infty.$$

4) *Нуле и знак функције*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{3}x^2 - x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge \left(\frac{1}{3}x^2 - x - 3\right) = 0.$$

Дакле, $x_1 = 0$, а решавањем квадратне једначине добијамо

$$x_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, x_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Нуле $x_2, x_3 \notin \mathbb{R}$ па график функције сече x-осу само у координатном почетку $A_1(0,0)$.

На знак функције утиче само нула функције, тј. тачка $x = 0$:

	$(-\infty, 0)$	$x = 0$	$(0, \infty)$
x	$-$	0	$+$
$\frac{1}{3}x^2 - x - 3$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Дакле, функција је позитивна за $x \in (-\infty, 0)$, а негативна за $x \in (0, +\infty)$.

5) *Монотоност функције и екстремне вредности:*

Након израчунавања добијамо да је први извод функције:

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right)' = x^2 - 2x - 3.$$

Стационарне тачке су нуле првог извода па је

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 = -1.$$

Монотоност функције, као и природу стационарних тачака испитујемо помоћу табеле:

	$(-\infty, -1)$	$x = -1$	$(-1, 3)$	$x = 3$	$(3, +\infty)$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

На основу табеле закључујемо да је функција растућа за $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, опадајућа за $x \in (-1, 3)$, а како се знак извода у околини тачке $x = -1$ мења из "+" у "-", онда је тачка $M_1 = \left(-1, \frac{5}{3}\right)$ тачка локалног максимума. Знак извода се у околини тачке $x = 3$ мења из "-" у "+", па је $M_2 = (3, -9)$ тачка локалног минимума.

6) *Конвексност и превојне тачке:*

Након израчунавања добијамо да је други извод функције облика:

$$y'' = \left(x^2 - 2x - 3\right)' = 2x - 2,$$

а нула другог извода је у тачки $x = 1$. Да би испитали конвексности и да ли је $x = 1$ заиста превојна тачка одређујемо знак другог извода. Знак се мења само у тачки 1:

	$(-\infty,1)$	$x=1$	$(1,\infty)$
$x-1$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Знак другог извода се мења у околини тачке $x = 1$, па закључујемо да је $P\left(1, -\dfrac{11}{3}\right)$ превојна тачка. Такође, функција је конвексна на доле за свако $x \in (-\infty, 1)$ а конвексна на горе за свако $x \in (1, +\infty)$.

7) *Цртање графика функције*

График функције је на слици 5.4.

0.3. Испитати особине и нацртати график функције

$$y = x^4 - 4x^2 + 3.$$

Решење. Дата функција је полиномна функција и то степена 4.

1) *Област дефинисаности:*

Полиномна функција је дефинисана за сваки реалан број, па је према томе

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.$$

2) *Парност и периодичност функције:*

Функција није периодична, али јесте парна јер је:

$$f(-x) = x^4 - 4x^2 + 3 = f(x).$$

Због тога треба испитати понашање функције само на позитивном делу x-осе, јер ће њен график бити симетричан у односу на y-осу.

3) *Асимптоте функције:*

Функција нема вертикалних асимптота, нити хоризонталних асимптота. Функција, такође нема ни косу асимптоту, јер је:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x} = \infty.$$

4) *Нуле и знак функције*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 3 = 0.$$

Последња једначина је биквадратна и решава се увођењем смене $x^2 = t$, па добијамо:

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 3 \wedge t_2 = 1.$$

Враћањем на смену добијамо да су решења биквадратне једначине $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$. Дакле, график функције сече x-осу у тачкама $A_1(-1,0)$, $A_2 = (1,0)$, $A_3 = (-\sqrt{3},0)$, $A_4(\sqrt{3},0)$.

На знак функције утичу тачке $1, \sqrt{3}$, јер испитујемо само како се функција понаша на позитивном делу x-осе:

	$(0,1)$	$x=1$	$(1,\sqrt{3})$	$x=\sqrt{3}$	$\sqrt{3},+\infty)$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+\sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Дакле, функција је позитивна за $x \in (0,1) \cup (\sqrt{3},+\infty)$, а негативна за $x \in (1,\sqrt{3})$. Слично ће бити и на негативном делу x-осе, функција је позитивна за $x \in (-\infty,-\sqrt{3}) \cup (-1,0)$, а негативна за $x \in (-\sqrt{3},-1)$.

5) *Монотоност функције и екстремне вредности:*

Након израчунавања добијамо да је први извод функције:

$$y' = (x^4 - 4x^2 + 3)' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2).$$

Стационарне тачке су нуле првог извода па је

$$\begin{aligned} y' = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4x(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow 4x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \wedge x_2 = \sqrt{2} \wedge x_3 = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Монотоност функције, као и природу стационарних тачака испитујемо помоћу табеле:

		$x=-\sqrt{2}$		$x=0$		$x=\sqrt{2}$	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

На основу табеле закључујемо да је функција растућа за $x \in (-\sqrt{2},0)$ $\cup(\sqrt{2},+\infty)$, опадајућа за $x \in (-\infty,-\sqrt{2}) \cup (0,\sqrt{2})$, а како се знак извода у околини тачке $x = 0$ мења из "+" у "-", онда је тачка $M_1 = (0, 3)$ тачка локалног максимума. Знак извода се у околини тачака $x = -\sqrt{2} \wedge x = \sqrt{2}$ мења из "-" у "+", па су $M_2 = (-\sqrt{2}, -1), M_3 = (\sqrt{2}, -1)$ тачке локалног минимума.

6) *Конвексност и превојне тачке:*

Након израчунавања добијамо да је други извод функције облика:

$$y'' = (4x^3 - 8x)' = 12x^2 - 8 = 4(3x^2 - 2).$$

Превојне тачке су нуле другог извода:

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Да би испитали конвексност и да ли су $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ заиста превојне тачке одређујемо знак другог извода. Нека је $a = \frac{\sqrt{6}}{3}$,тада имамо

	$(0, a)$	$x = a$	$(a, +\infty)$
$x - a$	$-$	0	$+$
$x + a$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Знак другог извода се мења у околини тачке $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$, па закључујемо да је $P_1\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{5}{3}\right)$ превојна тачка. Такође, функција је конвексна на доле за свако $x \in \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty\right)$ а конвексна на горе за свако $x \in \left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. Симетрично се понаша и на негативном делу x-осе, па је и $P_2\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{5}{3}\right)$ такође превојна тачка.

0.4. Испитати особине и нацртати график функције

$$y = x - 2 - \frac{6}{x - 1}.$$

Решење. Дата функција је рационална функција и после сређивања добијамо:

$$y = x - 2 - \frac{6}{x - 1} = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 1}.$$

1) *Област дефинисаности:*

Како за рационалну функцију именилац разломка мора бити различит од нуле, једино ограничење је $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ па је

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

2) *Парност и периодичност функције:*

Функција није периодична, а није ни парна ни непарна јер је:

$$f(-x) = \frac{x^2+3x-4}{-x-1} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$

3) *Асимптоте функције:*

Како је

$$\lim_{x \to 1 \pm 0} = \pm\infty$$

следи да је права $x = 1$ вертикална асимптота.

За косу асимптоту тражимо k и n:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x-4}{x^2-x} = 1 \\ n &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-3x-4}{x-1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x-4}{x-1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Дакле, функција има косу асимптоту $y = x - 2$, а нема хоризонталну.

4) *Нуле и знак функције*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-4}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Решавајући квадратну једначину добијамо да су нуле функције $x_1 = -1, x_2 = 4$. Дакле, у тачкама $A_1(-1,0)$ и $A_2(4,0)$ график функције сече x-осу.

На знак функције утичу тачке -1,4 као и тачка 1 у којој функција није дефинисана:

	$(-\infty,-1)$	$x=-1$	$(-1,1)$	$x=1$	$(1,4)$	$x=4$	$(4,\infty)$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	ндф.	$-$	0	$+$

Тачка у којој функција није дефинисана краће записујемо са ндф.

Дакле, функција је позитивна за $x \in (-1, 1) \cup (4, +\infty)$, а негативна за $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 4)$.

5) *Монотоност функције и екстремне вредности:*

Након израчунавања добијамо да је први извод функције:

$$y' = \left(\frac{x^2 - 3x - 4}{x - 1}\right)' = \frac{x^2 - 2x + 7}{(x - 1)^2}.$$

Стационарне тачке су нуле првог извода па је

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 7}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 7 = 0.$$

Корени ове квадратне једначине нису реални, па закључујемо да дата функција нема екстремних вредности. Такође, дата функција је позитивна за свако $x \in \mathcal{D}_f$ па закључујемо да функција расте у читавој области дефинисаности.

6) *Конвексност и превојне тачке:*

Након израчунавања добијамо да је други извод функције облика:

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 2x + 7}{(x - 1)^2}\right)' = \frac{-12}{(x - 1)^3}.$$

Превојне тачке су нуле другог извода, међутим $y'' \neq 0$ за свако $x \in \mathcal{D}_f$ па превојних тачака нема.

Да би испитали конвексност, испитујемо знак другог извода. Знак се мења само у тачки 1:

	$x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$x - 1$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	ндф	$-$

Дакле, функција је конвексна на горе за свако $x \in (-\infty, 1)$ а конвексна на доле за свако $x \in (1, +\infty)$.

0.5. Испитати особине и нацртати график функције

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 2}.$$

Решење.

1) *Област дефинисаности:*

Како за рационалну функцију именилац разломка мора бити различит од нуле и у бројиоцу поткорена величина мора бити већа или једнака нули. Тада морају бити испуњени услови:

$$x+2 \neq 0 \wedge x^2-1 \geq 0,$$

тј. $x \neq -2$ и $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$. Дакле, област дефинисаности је

$$\mathcal{D}_f = (-\infty,-2) \cup (-2,-1] \cup [1,+\infty).$$

2) *Парност и периодичност функције:*

Функција није периодична, а није ни парна ни непарна јер је:

$$f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^2-1}}{-x+2} \neq \left\{ \begin{array}{l} f(x) \\ -f(x) \end{array} \right. .$$

3) *Асимптоте функције:*

Како је

$$\lim_{x\to -2\pm 0} = \pm\infty,$$

следи да је права $x=-2$ вертикална асимптота.

За косу асимптоту тражимо k и n:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2+x} = 0, \\ n &= \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} = \pm 1. \end{aligned}$$

Дакле, функција нема косих асимптота, али има хоризонталних и то $y=1$ и $y=-1$.

4) *Нуле и знак функције*

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x^2-1=0.$$

Решавајући квадратну једначину добијамо да су нуле функције $x_1 = -1, x_2 = 1$. Дакле, у тачкама $A_1(-1,0)$ и $A_2(1,0)$ график функције сече x-осу.

На знак функције утичу тачке -1,1 као и тачка -2 у којој функција није дефинисана:

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<-1$	$x=-1$	$x=1$	$x>1$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	ндф.	$+$	0	0	$+$

Дакле, функција је позитивна за $x \in (-2,-1] \cup [1,+\infty)$, а негативна за $x \in (-\infty,-2)$.

5) *Монотоност функције и екстремне вредности:*

Након израчунавања добијамо да је први извод функције:

$$y' = \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}\right)' = \frac{2x+1}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}}.$$

Стационарне тачке су нуле првог извода па је

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}} = 0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}.$$

Нула првог извода је тачка која не припада области дефинисаности, па дата функција нема екстремних вредности.

Испитујемо монотоност функције, поново помоћу табеле:

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<-1$	$x=-1$	$x=1$	$x>1$
$2x+1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	ндф.	ндф.	$+$

Дакле, функција је расте за $x \in [1,+\infty)$, а опада за $x \in (-\infty,-2) \cup (-2,-1]$.

6) *Конвексност и превојне тачке:*

Након израчунавања добијамо да је други извод функције облика:

$$y'' = \left(\frac{2x+1}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}}\right)' = \frac{-4x^3-3x^2-2}{(x+2)^3(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}.$$

Превојне тачке су нуле другог извода

$$y'' \neq 0 \Leftrightarrow \frac{-4x^3-3x^2-2}{(x+2)^3(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = 0 \Leftrightarrow -4x^3-3x^2-2=0.$$

Последња једначина има само један реалан корен, а два коњуговано комплексна. Дакле, нула другог извода је $x = -1,137$ и то је могућа превојна тачка.

Да би испитали конвексност, испитујемо знак другог извода. Знак се мења у тачкама -2, -1,137, -1, 1:

		$x=-2$		$x=-1,137$		$x=-1$	$x=1$	
$-4x^3-3x^2-2$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$(x+2)^3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	ндф.	$+$	0	$-$	ндф.	ндф.	$-$

Дакле, функција је конвексна на горе за свако $x \in (-2, -1, 137)$ а конвексна на доле за свако $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 137, -1) \cup (1, +\infty)$.

7) *Цртање графика функције*

0.6. Испитати особине и нацртати график функције

$$y = (3 - x^2)e^x.$$

Решење.

1) *Област дефинисаности:*

Дата функција представља производ полиномне и експоненцијалне функције и нема никаквих ограничења за област дефинисаности, па је

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.$$

2) *Парност и периодичност функције:*

Функција није периодична, а није ни парна ни непарна јер је:

$$f(-x) = (3 - x^2)e^{-x} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}.$$

3) *Асимптоте функције:*

Нема вертикалних, нити хоризонталних асимптота. Нема ни косих асимптота, јер је:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-x^2}{x} e^x = \infty.$$

4) *Нуле и знак функције*

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (3 - x^2)e^x = 0.$$

Како је $e^x > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, следи

$$3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3}.$$

Дакле, у тачкама $A_1(-\sqrt{3}, 0)$ и $A_2(\sqrt{3}, 0)$ график функције сече x-осу. На знак функције утичу нуле функције:

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$x = -\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$x = \sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$\sqrt{3} - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\sqrt{3} + x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Дакле, функција је позитивна за $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, а негативна за $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

5) *Моно̄тоност̄ функције и екст̄ремне вреднос̄ти:*

Након израчунавања добијамо да је први извод функције:

$$y' = ((3 - x^2)e^x)' = -(x^2 + 2x - 3)e^x.$$

Стационарне тачке су нуле првог извода па је

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 = -3.$$

Монотоност функције као и природу стационарних тачака испитујемо помоћу табеле:

	$(-\infty, -3)$	$x = -3$	$(-3, 1)$	$x = 1$	$(1, +\infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

.

где је $f'(x) = -(x - 1)(x + 3)e^x$.

Дакле, функција расте за $x \in (-3, 1)$, а опада за $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$. Знак извода се у околини тачке $x = 1$ мења из "+" у "-", па је $M_1 = (1, 5.42)$ тачка локалног максимума. Знак извода се у околини тачке $x = -3$ мења из "-" у "+", па је $M_2 = (-3, -0.30)$ тачка локалног минимума.

6) *Конвекснос̄т и ūревојне т̄ачке:*

Након израчунавања добијамо да је други извод функције облика:

$$y'' = (-(x^2 + 2x - 3)e^x)' = -(x^2 + 4x - 1)e^x.$$

Превојне тачке су нуле другог извода

$$y'' \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 + \sqrt{3} \wedge x_2 = -2 - \sqrt{3}.$$

Да би испитали конвексност, као и постојање превојнох тачака испитујемо знак другог извода. Знак се мења у тачкама $a = -2 + \sqrt{3} \approx -0.27$ и $b = -2 - \sqrt{3} \approx -3.73$:

	$(-\infty, b)$	$x = b$	(b, a)	$x = a$	$(a, +\infty)$
$x - a$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x - b$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

где је $f''(x) = -(x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3})e^x$.

Дакле, функција је конвексна на горе за свако $x \in (-3.73, -0.27)$ а конвексна на доле за свако $x \in (-\infty, -3.73) \cup (-0.27, +\infty)$. Како се знак другог извода мења у околинама тачака $x_1 = -0.27$ и $x_2 = -3.73$, закључујемо да су $P_1 = (-0.27, 2.23)$ и $P_2(-3.73, -0, 26)$ превојне тачке.