

МЕТОДИКА ОБРАДЕ САДРЖАЈА ГЕОМЕТРИЈЕ

Један од основних задатака наставе математике од првог до четвртог разреда је да ученици изграде основна сазнања за просторне облике и односе, као и да формирају основне геометријске појмове. Тај задатак остварује се преко изучавања геометријских садржаја предвиђених наставним програмом математике. Основа формирања геометријских појмова је објективна стварност и сопствене активности ученика. У суштини, садржај геометријских појмова апстрахује се из просторних облика и односа објективне стварности, а полазна основа су активности ученика са предметим из њихове непосредне околине а састоје се од посматрања, моделовања, мерења, цртања, изрежавања, састављања и сл. Те активности су основа поткрепљивања мисаоних делатности у означавању садржаја геометријских појмова, односно на основу њих врши се апстракција и генерализација.

Кроз обраду геометријских садржаја код ученика треба да се формирају јасне и правилне претставе за неке геометријске облике, да се допринесе развоју мишљења ученика, да се развију просторне претставе, да се усвоји одређени фонд знања, умења и навика за цртање и мерење који имају велики практични значај како за припрему и успешно изучавање систематског курса наставе геометрије у предметној настави основне школе.

Са методичког аспекта, при изучавању геометријског материјала, неопходно је знати како протиче процес усвајања знања и какве посебности има тај процес у свакој етапи наставе. У последње време, психолошка и педагошка наука, вршиле су подробније огледе да би ушле у процес геометријског мишљења, да се открију и разјасне његове специфичности. У тим настојањима, код ученика разредне наставе, дефинишу се три нивоа, условно речено, "геометријског развоја". Сваки од њих нивоа карактерише се специфичностима који се састоји у језику који садржи одређену геометријску и логичку терминологију, своју симболику, као и дубину у логици обраде наставних садржаја.

Први степен карактерише се тиме да ученици посматрају геометријске фигуре као целину и не одвајају њене елементе. Ученик "који мисли на првом степену" може лако да препозна фигуре као што су: квадрат, правоугаоник, троугао, круг, да их именује при препознавању, али не и да уочава њихове битне особине, односно за њега свака фигура у суштини индивидуална. Овај ниво развоја ученика достиже се у првом разреду.

У другом степену развоја, ученици већ умају да успостављају релације између елемената једне фигуре, као и између елемената две различите фигуре. Међутим, на овом нивоу геометријског развоја, ученици још не могу да поставе својства у једном логичком низу. Тако, одређивање да су сви углови правоугаоника прави, разликује правоугаоник и квадрат према релацијама између страница, али врше уопштавање само за конкретан случај. Наиме, они уочавају да у квадрату углови су прави, али не долазе до закључка да је квадрат правоугаоник. Други ниво при одговарајућој организацији наставе, ученици достижу у трећем разреду.

У трећем нивоу, ученици су у могућности да успоставе везу између две или више особина једне геометријске фигуре, или пак, између истих својстава више геометријских фигура. На овом нивоу ученици почињу да схватају да једно својство дате фигуре може да се изведе из другог њеног својства логичким расуђивањем.

Пример: На основу релација између страница квадрата и општег појма обима многоугла, ученици могу направити логички извод да је обим квадрат $O = a + a + \text{вишег нивоа} + a$ или $O = 4a$.

На трећем нивоу, ученици прихватају дедукцију, могу једно својство логичким расуђивањем, изведу и друго, али уз помоћ наставника или уџбеника. Трећи ниво ученици достижу у четвртог разреда, али у почетној етапи.

Прелаз с једног на други, виши ниво, остварује се постепено. Притом, елементи вишег нивоа појављују се "унутар" претходног нижег, као показатељ прелаза ка вишем.

Сазнања за нивое геометријског развоја ученика, од великог је значаја за опредељење у методици наставног рада, посебно при формирању геоматријских појмова. Она треба да полази од чињенице да се ученици воде "узлазном" линијом, у одређеном периоду да пређу од нижег на виши ниво, али не само на основу узраста, већи и на основу "геометријске" зрелости.

Приликом обраде геометријских садржаја, доминантни значај има формирање геометријских појмова. Будући да су појмови мисаоне категорије а ученици разредне наставе у стадијуму конкретних операција интелектуалног развоја, формирање геометријских појмова треба остваривати према методичким поступцима који одговарају узрастним карактеристикама ученика. Полазећи од тих сазнања, процес формирања геометријских појмова треба започети посматрањем и манипулисањем са конкретним предметима из непосредне околине или походним дидактичким средствима и материјалима. Као резултат тих активности су перцепције и претставе и претстављају основни материјал за даље изграђивање појмова. Значи, формирање геометријских појмова остварује се у две етапе, и то:

- **прва етапа**, добијање перцепција и претстава за геометријске облике и односе и
- **друга етапа**, апстракција небитних и генерализација битних особина посматраних објеката, односно формирање појма.

Посматрањем предмета и појава из непосредне околине или дидактичког материјала, ученици упоређују, врше анализу, уочавају сличности и разлике међу њима, односно врше апстракцију и генерализацију. Процес апстракције и генерализације је успешан само када ученици, приликом посматрања, стварају одређене мисаоне операције, пре свега, упоређивање, анализу и синтезу, на основу којих одређују битне и небитне особине посматраног објекта.

У откривању битних особина геометријског појма, значајно место заузима варирање небитних особина.

Пример: При изучавању правоугаоника у другом разреда ученицима проказује се више различитих модела правоугаоника, израђених од различитог материјала (хартије, картона, пластике), обојених различитим бојама (црвена, сива, жута), у различитим величинама и положајима као и са променљивим размерама страницама. На тај начин ученици посматрањем уочавају и схватају да величина, положај, боја, однос суседних страница је променљив и као такви не могу бити битна својства правоугаоника. Међутим, у свим посматрањима, правоугаонцима се не мења број страница, облик углова и релације између супротних страница, су битна својства правоугаоника, односно његове карактеристике.

Овакав приступ је много ефикаснији за увођење неких подпојмова, као што су облици троуглова на основу углова или на основу страница. Тако, при класификацији троуглова према угловима, ученици при посматрању уочавају да карактеристике основног

појма (у случају троугла) увек постоји (егзистира), а мења се само облик трећег угла (два угла су увек оштра).

У откривању битних особина геометријских појмова, значајну улогу има и упоређивање. Са њим се постиже диференцирање сличних и различитих појмова. Упоређивање доприноси, при посматрању, да се открију суштинске сличности и суштинске разлике посматраних објеката, а тиме да се формирају јасније представе. Ученици врше упоређивање, обично оперисањем са својствима различитих геометријских облика и односа. То доприноси да се код њих јасније формирају представе, да се развија мишљење и врши генерализација на вишем сазнајном нивоу.

Активности при којима ученици врше упоређивање треба да буду усклађене са узрасним могућностима. Будући, ученици овог узраста најуспешније врше упоређивање конкретних предмета, увођењем новог појма упоређивање треба да се врши на конкретне предмете. Тако, при увођењу појма правоугаоника посматрају се и упоређују стакла на прозорима, зидови у учионици, површине столова, табле, листа хартије и сл.

Развијањем мисаоног процеса при упоређивању одвија се, углавном, у два правца:

а) Постепено прелажење упоређивања при непосредним посматрању ка упоређивању претстава. Тако, ученици првог разреда врше упоређивање геометријских облика (троугао, квадраз, круг) само посматрањем модела, слика или цртежа. Ученици трећег разреда, пак, лако врше упоређивање према претстави. Они лако могу да искажу сличности и разлике квадрата и правоугаоника без директног посматрања.

б) Упоређивање једног ка упоређивању неколико битних својстава, при чему се целивитије откривају карактеристика појма. Тако, ученици првог разреда упоређују дужи само према дужини, а ученици другог разреда правоугаоник и квадрат упоређују према страницама и угловима и сл.

На тај начин ученици примењују од нивоа препознавања датог облика, својство или однос при непосредним посматрању ка нивоу репродукцији претставе са којим мисаоно могу оперисати. За откривање битних својстава појмова, при посматрању, значајну улогу има објашњавање. Са њим наставник упућује и усмерава ученике на посматрање са одређеним циљем. Том приликом истиче битне карактеристике посматраног објекта, при чему до изражаја долази аналитичко-синтетички рад посматрања чиме се задају услови за уопштавање.

У настави математике геометријски појмови, углавном, уводе се према следећим етапама:

- а) показивањем предмета, модела, слика, цртежа и сл.,
- б) описивањем појмова и
- в) дефинисањем појмова.

У првој етапи обезбеђују се перцепције и претставе, као основа за формирање појма. У другој етапи диференцирају се небитна и битна својства појма, при чему се небитна апстрахују (одбацују) док се битна генерализују. Овим се задају неопходне претпоставке за дефинисање појма.

У трећој етапи, на основу објашњења и генерализације, врши се дефинисање појма. Дефинисање геометријског појма је сложена мисаона делатност и њему треба прићи са много пажње. У вези са тим треба напоменути да:

1. Основни геометријски појмови се не дефинишу, већ се објашњавају на основу осматрања, при чему се објашњавају нека својства. Ти појмови су: тачка, права, раван и

растојање. Том приликом, на почетку се материјализују, а затим се ученици постепено уводе у апстракцију.

Пример: Праву прво приказујемо као конач или ластиш, да се прикаже очигледно бесконачност (" да продужимо конач колико хоћемо"), затим се она уочава на ивицама предмета (ивице у учионици, на столу), савијањем листа хартије итд.

2.Изведени појмови дефинишу се зависно од узраслих могућности ученика. У настави математике од првог до четвртог разреда, приликом дефинисања геоматријских појмова, обично се примењује дефиниција преко најближег родног појма и врсне одлике (особине), описивањем појма и генетичком дефиницијом.

Дефинисање преко најближег родног појма и врсне одлике, често пута примењује се у настави геометрије. Приликом дефинисања појмова на овај начин значајно је одредити најближи родни појам појма који дефинишемо и врсну одлику по којим се разликује од других појмова. Врсна одлика је неко битно својство које има сам појам који дефинишемо.

Пример: При дефинисању појма правоугаоника, као најближи родни појам одређује се четвороугао (паралелограм је ближи родни појам, али се не изучава на овом узрасту) а врсна одлика је једна битно својство правоугаоника – сви углови су прави. На основу тога, још у другом разреду, може да се каже да: "Правоугаоник је четвороугао код кога су сви углови прави".

Међутим, формирање геометријских појмова не подразумева да се само научи дефиниција, већи и увођење ученика у дефиницију. Та значи, наставник треба да оспособи ученике да одреде најближи родни појам и утврде врсну одлику.

Описивање појма практикује се када није могуће дати дефиницију појма. Такав је случај са основним појмовима. Ови појмови објашњавају се преко модела, на којим се приказује неко њихово својство.

Пример: а) Права се замишља као бескрајан добро затегнут конач.

б) Тачка се претставља као додир пенкала и хартије и сл.

Генетичка дефиниција примењује се када се објашњава како је настао појма.

Пример: Кружница се дефинише са описивањем поступка како је настала, како се црта шестаром и још нека битна својства која могу ученици да сазнају.

Предност овог начина дефинисања је у томе што се допуњују информације о појму, чиме се он конкретизује, наводе везе са дргим појмовима, свеобухватно и у појединостима открива се његова садржина, чиме се ученицима омогућава да дубље упознају појам и трајно га усвоје.

Изчавање геометријских садржаја треба да се креће линијом:

- формирање геометријских претстава,
- развијање мишљења и
- формирање просторних претстава.

Формирање геометријских претстава

Прво упознавање ученика са неком геометријском фигуром настаје још у (предшколској установи) првом разреду. На том нивоу они се упознају са фигурама на степену препознавања, именују их, препознају предмете из непосредне околине или специјално израђених модела и на цртежима. На тај начин, ученици постепено сазнају "шеме" изчених фигура. У тој шеми сазнају се услови за аналитичко-синтетичку делатност, чиме се олакшава усвајање својстава сваке фигуре, што се дешава у другом нивоу развоја.

Прелаз од првог до другог нивоа врши се полазећи од материјализације геометријских објеката који се изучавају.

Пример: Права се претставља као затегнути конац, ластиш, затим ивица учионице или стола, до линије савијања листа хартије.

Пример: Круг започиње да се изучава полазећи од кружних тачкова, преко дна цилиндричног суда, до трага који оставља оловка на шестару и шрафирање дела равни који је ограничен са том линијом.

Формирање геометријских претстава претпоставља сазнајну активност ученика који ефикасно може да се оствари применом лабораторијске методе. Са применом ове методе, сазнајна активност ученика спроводи се мерењем, упоређивањем, аналитичко-синтетичким делатношћу, где ученици самосталним радом могу доћи до апстракције и генерализације.

Пример: Својства квадрата, правоугаоника, класификација троуглова према угловима и страницама, могуће је много ефикасније обрадити применом лабораторијске методе. Знања добијена са оваквом организацијом рада су свеобухватна, јаснија и трајнија.

Развијање мишљења ученика

У процесу изучавања геометријском материјала формирају се навике за индуктивно мишљење, односно ученици се оспособљавају да умеју да праве једноставније индуктивне закључке. Истовремено са тим, постепено се развијају и умења за дедуктивно мишљење. То се остварује применом мисаоних активности као што су: анализа, синтеза, упоређивање, апстраховање, генерализације.

Још у првом разреду, када се ученици први пут упознају са геометријским фигурама, врше анализу и синтезу на елементарном нивоу.

Пример: При формирању скупова од логичких блокова, према карактеристици облика фигуре, упоређују и анализирају фигуре са аспекта њихових облика. У друго разреду већ се анализирају својства фигура (облик правоугаоника или релације између страница квадрата). Та анализа је дубља, мисаона активност квалитетнија, односно ученици почињу да се издижу на други развојни ниво. Овде почиње увођење геометријске симболике, богатија је математичка терминологија, праве се огледи за дефинисање ("правоугаоник је четвороугаоник коме су сви углови прави"). У трећем разреду ученици врше анализу фигуре упоређивањем са другом фигуром, према битним својствима у могућности су да врше класификацију геометријских фигура; обогаћује се словна симболика, ученици су у могућности да врше генерализацију на основу дубље аналитичко-синтетичке делатности. Међутим, још доминира индуктивно закључивање. Дефинисање математичког појма, ученици могу да врше преко најближег родног појма и врсне одлике, ако пре тога претходи одговарајућа аналитичко-синтетичка делатност.

У четвртном разреду достиже се степен геометријског развоја када успешно могу да се примене једноставнији случајеви дедуктивног закључивања. То најбоље може да се сагледа приликом примене поступка израчунавања површине и запремине квадра и коцке.

Развој мишљења ученика може бити интензивнији, уколико је настава организована као активна и сазнајна делатност, у којој ученици, при добијању знања, улажу одређени интелектуални напор, врше упоређивање, анализи, синтезу, апстракцију и генерализацију.

Формирање просторних претстава

Просторне претставе одражавају међусобни однос и својства реалних предмета, тј. својства тродимензионог простора који се посматра или је припремљен, перцепиран.

Још у предшколиском периоду деца су запрпана великим бројем претстава о облицима, величинама и узајамним положајима различитих предмета из непосредне околине. Те претставе су непотпуне и често пута нетачне. На основу њих, касније, формирају се претставе за важне геометријске облике а затим и појмова. Кроз игре и практичних активности, ученици упознају различите облике (пре свега обле и рогљасте), њихове међусобне положаје (" ... је под ...", "... је на ...", " ... је између ... "), упоређују по величини (" ... већи од ... ", " ... мањи од ... "). Значи, основа за формирање просторних претстава код ученика су скупљене претставе непосредни посматрањем материјалних објеката са геометријским облицима које ће у наредним етапама заменити геометријски модели. На основу тих претстава, још у другом и трећем разреду (други ниво развоја) могуће је формирати сопствене просторне претставе ученика, када нове просторне претставе формирају се као комбинација од раније формираних.

Методички поступак који обезбеђује трајније геометријско значење је формирање просторних претстава које почиње непосредним посматрањем конкретних предмета и материјалних модела геометријских фигура. На првом нивоу (први разред), просторне претставе формирају се практичним деловањем просторне оријентације реалних предмета и материјалних модела геометријских тела. На друго нивоу (други и трећи разред), формирање просторних претстава је сложеније. У том смислу на основу друге претставе квадратне плоче да се формира коцка, из правоугаоног квадрата и сл.

Када ученици достигну други ниво и улазе у трећи (четврти разред) могу да посматрају и нека својства геометријских фигура (квадар и коцка) и да врше класификацију тела према неким њиховим својствима (обла, рогљаста).

Ефикасност обраде геометријских садржаја зависи и од тога у којој мери настава обезбеђује активну и сазнајну делатност ученика. У том смислу значајно је обезбедити јединстви између анализе и синтезе, оспособљавање ученика да уопштавају (генерализацију), поред индукције наћи одговарајуће места за дедуктивни приступ изучавања геометријских садржаја као и примена наставних метода заснованих на практичним активностима ученика.

Анализа и синтеза су мисаоне операције које се извршавају у тесној међусобној вези. То је природно и неопходно зато што изучавање сваког геометријског облика, свако њихово својство, усвајање сваког практичног умења за мерење, цртање, моделовање, решавање задатака, начешће је повезано са непосредним посматрањем и аналитичко-синтетичким дејством ученика.

Пример: Приликом увођења појма површине коцке, ученици на моделу и цртежу анализирају површину коцке. Са анализом утврђују да се она састоји од 6 квадрата, да су сви квадрати подударни, што значи да имају једнаке површине. На основу тих сазнања врши се синтеза битних својстава која се симболички може приказати као:

- нека су P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 и P_6 површине страна коцке;
- површина P коцке може да се запише: $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6$;
- будући да: $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = a \cdot a$,
- $P = a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a = 6 \cdot a \cdot a$, тј. $P = 6 \cdot a \cdot a$ или $P = 6 \cdot a^2$.

Много значајно у наставном процесу да се сазнају могућности развоја способности ученика за уопштавање. Повољни услови за ову мисаону делатност дати су када у обради садржаја се полази од родног ка врском појму. У таквим случајевима ученици самостално могу вршити уопштавање. Тако, када упознају четвороугаони облик и именују као

четвороугао, лако именују троугао, петоугао, шестоугао и сл. За њих сада постаје јасно да постоје бесконачно много облика многоуглова.

Систем геометријских садржаја омогућава индуктивни приступ њиховог изучавања, зато што одговара узрасним карактеристикама ученика. Међутим, то не значи да дедукцију треба искључити из наставне праксе. Напротив, рационално је, при обради геометријских садржаја, примењивати и дедукцију.

Пример: На основу опшег извода да обим многоугла је збир дужина његових страница, може се доћи до мање опшег извода, односно да за троугао важи: $O = a+b+c$, а за четвороугао: $O = a+b+c+d$ и сл.

Активно и сазнајно учење ученика у настави може ефикасније да се оствари применом наставних метода заснованих на практичним активностима ученика. При овим активностима остварује се самостално мисаоно деловање ученика, они самостално врше: мерење, упоређивање, анализу, синтезу, апстраховање и генерализацију.

Пример: Изучавање појма правоугаоника успешно може да се организује практичним активностима ученика. У тим активностима ученици самостално утврђују облик моноугла, мерењем одређују облик угла на правоугаонику и релације између његових страница. На основу ових сазнања ученици уопштавају да: "правоугаоник је четвороугао ког кога су сви углови прави и две по две супротне странице једнаке".

Методе засноване на практичном раду ученика много ефикасније могу да се примене и при класификацији троугла према угловима страницама, израчунавање површине квадрата и коцке и сл. Тако, при класификацији троуглова према угловима, ученици мере помоћу правоугла углове више троуглаова и долазе до општег закључка да "у било ком троуглу два угла су оштра, а трећи може бити оштар, прав или туп, према извршеној класификацији".

Велики значај за развијање мисаоне делатности ученика у процесу формирања геометријских представа и појмова имају цртежи. При цртању одређење геометријске фигуре ученици врше више мисаоних операција: анализа, синтеза, упоређивање, апстраховање и генерализацију. Одатле, кроз наставу геометрије ученици треба да се оспособе да геометријске фигуре предсављају цртежом, да разликују и откривају геометријске облике и односе представљене цртежом чиме се графичке слике претварају у сазнајни сигнал реалности просторних облика, односа и карактеристика. Притом треба водити рачуна за посупност у сложености цртежа које ученици треба да избегавају. Тако, ученици трећег разреда најпре цртају произвољан троугао само уз помоћ лењира, затим облик троугла према угловима и на крају облик троугла према страницама, чије цртање изводе елементарном геометријском конструкцијом.

Геометријски цртеж ја практичнији рад који тражи јединство просторних и координатних представа. Цртање усавршава просторне представе ученика задаје навике за коришћење прибора за цртање и васпитава тачност и уредност рада. Поред тога геометријско цртање налази примену и у осмишљавању пазличитих животних ситуација.

Права и дуж

Појмови праве и дужи уводе се у првом разреду, без тражења од ученика да их дефинише. Да би се дале јасне представе за ове појмове код ученика, најчешће се прави материјализација праве или криве линије помоћу конца или ласта, са којим може да се зада бесконачност праве (одмотавањем конца или развлачењем ласта), тиме што

термин бесконачност се "преводи" на језик ученика овог узраста - "да продужимо колико хоћемо".

Прве представе формирања са концем лиластишом, допуњујемо савијањем листа хартије, чиме прелазимо на нематеријализацију праве, односно ка првој етапи апстракције.

Да би се истакле карактеристике облика праве, погодно је формирати представу за криву линију, ослобађањем конца, односноластиша.

Дати модели праве и криве линије, касније се преносе на цртеж. Том приликом морају се користити цртежи из уџбеника, графофолија, дијафилм и сл. Значајно је да су праве линије на цртежу у различитим положајима – хоризонталне, вертикалне или косе. Притом, прва етапа у раду је препознавање (разликовање) праве и криве линије. Прве цртеже ради наставник на табли, а затим ученици цртају у свескама или уџбенику, ако су припремљени за такаву намену. Приликом цртања правих треба да се води рачуна, и наставник и ученици, да праве цртају у различитим положајима (хоризонталне, вертикалне, косе) без именованја положаја. Ови положаји именују се у трећем разреду.

Приликом изграђивања геометријског појма тачке, обраћа се пажња на њену нематеријалност, односно да она нема димензије. На почетку се само истиче да она нема дужину, а продубљено се осмишљава при изучавању узајамног положаја праве и тачке, две праве и праве и равни. На слици: Вса, Сса, Аса и Аер.

Будући да је постигнут одређени степен "нематеријалности" праве, представа за дуж формира се само преко цртежа, истицањем да је то један ограничен део дате праве (слика), обележавањем две различите тачке праве.

Појам дуж касније се осмишљава преко цртежа које израђују сами ученици, где почиње са обележавањем крајњих тачака дужи (слика), а затим са њиховим повезивањем добија се дуж.

У првом разреду појам дужи обрађује се на степену препознавања, зато треба практиковати активности преко којих ученици цртају дужи у различитим положајима и у односу на различите дужине, да препознају дужи у различитим положајима у равни и у ситуацијама када су дужи дате заједно са другим фигурама – праве, полуправе, ограничене криве линије – да препознају дуж која се јавља као страница неке геометријске фигуре која је ученицима позната (троугао, квадрат, правоугаоник).

У првом разреду ученици упознају се и са појмом дужина дужи. Они упоређују дужи "од ока", помоћу конца преношењем дужине једне дужи на другу, као и мерењем дужине дужи помоћу лењира. У напреднијим одељењима ученици упоређују дужи помоћу шестара, сабирају и одузимају дужи конструктивно, или, када одређују дужину изломљене линије конструктивним путем.

Представа за изломљену линију, ученицима се даје када стекну одређено искуство у раду са дужима и усвоје неопходну терминологију. Као припремна активност за појам изломљене линије могу се посматрати различите фигуре, састављене од дужи, међу којима има и изломљених линија (слика).

Од посматраних фигура издвајамо оне које имају једно заједничко својство – да су састављени од више дужи тако да крај једне је почетак друге дужи, али не леже на истој правој, односно заједно да не образују једну дуж. Такву фигуру називамо изломљена линија, без да се даје дефиниција изломљене линије. Приликом анализе изломљене линије погодно је утврдити од колико дужи је састављена свака од њих. Посебну пажњу, при посматрању, треба посветити затвореној изломљеној линији и то само конвексним (испуценим), будући да она служи као основа за увођење појма многоугла (слика).

Даље осмишљавање појма изломљене линије врши се са одређивањем њене дужине, на два начина – аритметички и геометријски, не губећи из вида и затворену изломљену линију, будући да са њом дају се потребне претпоставке за увођење појма **обима** многоугла, као збир дужина његових страница.

Угао

Из свакодневног искуства, ученици имају неку конкретну представу за угао: угао на крову куће, угао на огради и сл. Ове представе ученика треба искористити за увођење геометријског појма **угао**. Међутим, још у почетним активностима за увођење овог појма, његову садржину треба разграничити од животног искуства ученика. Због тога, ученици треба да стекну представу за угао преко модела и то на почетку са две летве које су на једном крају причвршћене једна на другу, затим са моделом угла од танке жице, са циљем да се направи први корак ка апстракцији материјалности кракова и да се даде представа да су краци полуправе (слика).

Затим се приказује модел угла исеченог од картона или хартије, што претставља етапу на путу ка апстрактном схватању овог појма. Са оваквим моделима указује се на унутрашњу област угла, односно на део равни захваћен крацима, што претставља елемен за дефинисање појма угла (слика).

Даље осмишљавање појма угла је преко препознавања угла на цртежу и цртањем угла. Приликом цртања угла, значајно је, да се цртају само конвексни (испупчени) углови и то у различитим положајима у равни (слика).

Приликом цртања углова треба уочити и његове елементе: краке . полуправе које га образују и теме – заједничка почетна тачка полуправих.

Будући да ученици већ познају неке геометријске фигуре при чијем именовању примењује се термин "угао" (троугао, правоугаоник, многоугао), погодно је да се уоче углови тих фигура. Погодан начин за то је фигура направљена од хартије (троугао), да му се "откину" углови и да се покажу ученицима (слика).

Приликом класификације углова, најпре се уводи прав угао. У наставној пракси, најчешће, представа правоугла формира се помоћу углова правоугаоника. То се показало доста успешно. Најчешће то се ради директно, односно када ученици уоче углове правоугаоника, наставник "каже" да "ти углови и сви као они, називају се прави углови". Овакав приступ сматра се коректним и логички исправним. Притом наставник истиче да су и углови квадрата први. Овде почиње припрема ученика за схватање квадрата као специјалног облика правоугаоника. Будући да се угао посматра као део равни, то важи и за прав угао. Погодно за то је приказати га са двојним пресавијањем листа хартије неправилног облика (слика). Са поклапањем правих углова који се добијају пресавијањем, утврђује се да се они међусобно једнаки.

Приликом увођења појмова: оштар угао, туп угао ученици треба да познају два важна својства, повезани са угловима, и то:

- да су сви прави углови једнаки између себе и
- да величина угла зависи од "отвора" његових кракова, али не и од њихових дужина.

У том циљу на цртежу се приказује продужавање кракова правоугла, а постојаност његове величине утврђује се поклапањем са другим правим углом, обично од картона.

Увођење појмова оштрог и тупог угла врши се њиховим упоређивањем са правим углом, у почетку, наношењем на моделу угла један над другим, по могућности, модел

правог угла да буде од провидне хартије или пластике. Ипак, најчешће се користи прав угао троугаоног лењира из ученичког комплета прибора (слика).

Помоћу демонстрације уопређивања углова, изводи се и њихова класификација, односно:

- оштар угао - угао који је мањи од правог угла и
- туп угао – угао већи од правог угла.

На овом нивоу не утврђујемо друге облике углова.

Кружница и круг

Прве представе о кружном облику ученици добијају из непосредне околине, породици, предшколској установи. У првом разреду, на основу тих искустава и применом разнородних наставних средстава, те представе се потврђују, али знања о кругу остају на степену препознавања. Увођење појмова кружнице и круга на виши ниво од препознавања је повезано са бројним потешкоћама које могу да се избегну са њиховим постепеним увођењем и коришћењем раније добијених знања. Будући да дефиниција кружнице тражи одређени степен апстракције појмова са којима се они дефинишу, на овом узрасту овај појам се не дефинише, али зато може "да се опише" поступак како "настаје" кружница. Наиме, ученици знају како се помоћу лењира црта дуж дате дужине и тај поступак лако могу да опишу. Затим наставник показује поступак за цртање кружнице, када претходно упознаје ученике са направом која се употребљава за цртање – шестар.

Од момента показивања рада са шестаром, када кружница још није нацртана, потребно је ученицима скренути пажњу да игла шестара стално стоји на једно место (у једној тачки), а други крак, на чијем крају је креда, кружи и притом описује једну криву линију која се зове кружница. Исто тако, значајно је да се укаже и на сталност отвора шестара, да би се касније тим сагледавања извели елементи кружнице – центар-тачка где "стоји" игла шестара и радијус (полупречник)-дужина дужи која претставља отвор шестара, односно растојање између врха илге и врха где се налази креда (слика).

Када нацртају неколико кружница, код ученика се интуитивно намеће закључак да: да би се нацртала кружница потребно је знати где "забости" шестар, односно где је центар кружнице и колики је "отвор" шестара, односно да се одреди радијус кружнице.

Много је значајно кружницу посматрати и са другог аспекта. Наима, будући да је кружница затворана крива линија, са њом се ограничава део равни, који такође представља геометријску фигуру – круг, а кружница је његова граница и припада кругу(слика).

Да би се круг истакао, потребно је обојити или шрафирати његову унутрашњу област, да би могло да се издвоји и уочи део равни који припада кругу.

Појам полупречник кружнице (круга) уводи се приказивањем два радијуса који леже у истиј равни. Одтле се изводи веза између полупречника и пречника (пречник је једнак два полупречника, односно полупречник је половина пречника).

Осмишљавање појмова кружнице и круга, истицањем разлике између њих, врши се преко активности за одређивање припадности или неприпадности дате тачке на кружници или кругу (слика). На слици је кружница означена са k , а круг K .

Притом, на цртежу треба да се уочи, да:

- тачка A припада кружници k ,
- тачка A припада кругу K ,
- тачка B припада кругу K ,
- тачка B не припада кружници k ,

- тачка С не припада кружности k ,
- тачка С не припада кругу K ,
- тачка А припада и кружности k и кругу K .

Правоугаоник и квадрат

Још у припремном периоду првог разреда ученици се упознају са неким облицима многоуглова, као што су троугао, правоугаоник и квадрат. Обрада ових геометријских фигура је на основу искуства ученика из свакодневног живота, породице, предшколске установе. Увођење појма правоугаоника и квадрата у првом разреду врши се показивањем модела ових геометријских фигура, посматрањем модела, пропраћено је са објашњењем наставника. Прва знања ученика о правоугаонику и квадрату су на степену препознавања, што подразумева да се они не дефинишу, нити да се изучавају њихова својства, већ их ученици препознају и разликују од других геометријских фигура, да стекну искуство и сећање ради даљих потреба у настави геометрије.

Продубљена знања за правоугаоник и квадрат ученици ће добити када почну да изучавају основна својства ових фигура. За откривање битних особина правоугаоника и квадрата потребно је да варирају небитне особине: боју, материјал од кога су направљени модели, величину, положај у равни и сл. Посебно је значајно варирати дужине страница и положај у равни, будући да се они јављају приликом цртања правоугаоника и квадрата (слика).

Преко мерења, цртања и моделовања правоугаоника и квадрата, ученици упознају да:

- правоугаоник има четири странице (је четвороугао),
- два и две супротне странице правоугаоника су једнаке између себе,
- квадрат има четири странице (је четвороугао),
- све странице квадрата су једнаке између себе.

На основу ових сазнања, ових особина, ученици касније, могу да искажу и дефиниције: "Правоугаоник је четвороугао са правим угловима", односно "квадрат је правоугаоник са једнаким страницама".

Приликом обраде правоугаоника и квадрата треба користити моделе ових геометријских фигура, да се не би вукла идеја да су правоугаоник, односно квадрат само затворене изломљене линије, већ да су део равни ограничене са том изломљеном линијом. То је значајно и са становишта правилног схватања обима као збира дужина страница, односно дужина изломљене линије и за површину као броја који се придружује делу равни који је ограничен са изломљеном линијом.

Обим квадрата, ученици израчунавају још у другом разреду, на основу знања за одређивање дужине изломљене линије. Први задаци су са сабирањем дужина за све четири странице, ако су оне дате, или са њихомом мерењем и израчунавањем збира. После следе задаци са задавањем, односно мерењем само једне странице и примена особине да су све странице квадрата једнаке између себе (слика).

Други облик задатака, када се обради множење са 4, може се примењивати и скраћени начин израчунавања обима. Тада, у вези са квадратом страница 3 cm (слика), израчунавање може се извршити на следећи начин:

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3 = 12, \text{ што значи да је обим квадрата } 4 \cdot 3 = 12, \text{ односно } 12 \text{ cm.}$$

Слични поступак задаје се са задатком за израчунавање обима правоугоника (слика).

Извођење формула за израчунавање обима квадрата, односно правоугоника је на основу мерења и упоређивања страница на више цртежа ових геометријских фигура. Тако, ученици мере и упоређују странице три или више квадрата и утврђују да су све једнаке између себе. Поред тога странице могу да се означе истим симболом (иста променљива), која означава њихову дужину (слика).

Будући да је обим збир дужина страница квадрата, то може кратко да се запише на следећи начин:

$$O = a + a + a + a = 4 \cdot a, \text{ тј. } O = 4 \cdot a.$$

После извођења формуле, ученици се оспособљавају за њену примену у конкретном случају.

Пример: Израчунати обим квадрата чија је страница $a = 5 \text{ cm}$?

Препоручљиво је да ученици овакве задатаке решавају на следећи начин:

Дато је: $a = 5 \text{ cm}$. Треба израчунати O .

$$O = 4 \cdot a, O = 4 \cdot 5, O = 20 \text{ cm}.$$

За памћење формуле потребно је решавње и обрнутих задатака, односно да се израчунава страница квадрата ако је дат његов обим.

Пример: Израчунај страницу квадрата чији је обим 32 cm .

На сличан начин изводи се и формула за израчунавање обима правоугоника. Наиме, мерењем наспрамних страница правоугоника констатује се да су две и две супротне странице једнаке између себе и означавају се истим симболом (променљивом), са a и са b (слика).

Будући да је обим збир дужина страница правоугоника, то симболички може да запише као:

$$O = a + a + b + b, \text{ тј. } O = 2 \cdot a + 2 \cdot b.$$

Поступак за оспособљавање ученика за примену формуле за израчунавање обима правоугоника, је сличан као код квадрата.

Пример. Израчунати обим правоугоника чије су странице $a = 8 \text{ cm}$ и $b = 5 \text{ cm}$.

Дато је: $a = 8 \text{ cm}$ и $b = 5 \text{ cm}$. Треба одредити O .

$$O = 2 \cdot a + 2 \cdot b, O = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 5, O = 16 + 10, O = 26 \text{ cm}.$$

Цртање квадрата и правоугоника је значајна етапа у запамћивању особина ових фигура. На почетку, ученици ће их цртати помоћу шаблона. Касније, у трећем разреду, цртање је осмишљено тако што се цртају прави углови помоћу троугаоног лењира, а странице се мере (лењиром или шестаром), при чему се памте особине квадрата и правоугоника (слика).

Троугао

Прва знања о троуглу, ученици добијају у првом разреду, али на степену препознавања. Том приликом, они се најчешће сусрећу са једнокостраничним троуглом, због честе примене логичких блокова.

Појам троугла продубљује се када се обраде појмови дужи и угла. Тако, у другом разреду, уводе се основни елементи троугла – странице, углови и темена. На овом степену изучавања појма троугла треба избегавати примену само модела једностраничног троугла, зато што препознавање троугла није само на основу искуства ученика посматрањем једнакостраничних троуглова из дидактичког материјала, већ и на основу броја страница

или броја углова. Уочавање три угла у троуглу треба направити преко "откидања" углова на моделу троугла од хартије.

Означавање троугла практикује се када ученици изуче латиницу. То треба да је повезано са уочавањем страница троугла, на основу знања за изломљену линију. Тада ће ученици уочити заједничке тачке да дужима, односно теменима троугла и њих ће означавати са великим словима латинице, а истовремено ће означавати и странице троугла.

Израчунавање обима троугла треба увести постепено, односно прво мерити дужину страница и записивати их, а затим израчунати збир дужина који претставља обим троугла.

Пример: За троугао ABC (слика) је: $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$ и $BC = 5 \text{ cm}$. Његов обим износи: $O = AB + AC + BC$, $O = 6 + 4 + 5 = 15$, $O = 15 \text{ cm}$.

Најцеловитија знања о троуглу у почетној настави математике, ученици ће добити приликом класификације троуглова према страницама и угловима. За успешну обраду ових садржаја треба актуелизирати знања о мерењу и упоређивању дужи, разликовање оштрих, правих и тупих углова, што подразумева њихово упоређивање са правим углом помоћу модела правог угла од провидне хартије или правог угла троугаоног лењира.

Погодно је класификацију вршити на основу самосталног рада ученика. Наиме, приликом обраде класификације троуглова према страницама, ученицима треба дати да измере и упоређују странице више троуглова, међу којима има свих облика. На основу резултата мерења и упоређивања страница, ученици формирају три класе троуглова, и то:

- троугао коме су све три странице једнаке између себе – **једнакостраничан троугао**,
- троугао коме су две странице једнаке између себе, а трећа већа или мања – **једнакократи троугао** и
- троугао коме су све три странице различите између себе – **разнострани троугао**.

Именовање троуглова врши наставник.

Пре него да се пређе на класификацију троуглова према угловима, потребно је организовати активности преко којих ће ученици препознати облике углова, на унапред припремљеним моделима или цртежима троуглова, међу којима ће бити свих облика троуглова према угловима. У активностима у вези са одређивањем облика угла у сваком троуглу, ученици ће доћи до сазнања да у било ком троуглу два угла су оштра. На основу облика трећег угла може се извршити терминолошко проближавање облика угла и на облик троугла, односно ако је трећи угао:

- прав – троугао је правоугли,
- туп – троугао је тупоугли и
- оштар – троугао је оштроугли.

На основу претходних сазнања, ученици могу да искажу и дефиницију облика троуглова према угловима, односно "Правоугли троугао је онај који има један прав угао" (друга два су оштра), "Тупоугли троугао је онај који има један туп угао" (друга два су оштри) и "Оштроугли троугао је онај који има сва три оштра угла". Знања у вези са класификацијом троуглова према угловима поткрепљују се са препознавањем или утврђивањем мерењем облика датог троугла, обично са цртежом у уџбенику, у радној свесци, наставном листићу, програмираним материјалом и сл., где су приказани сви облици троуглова према угловима. На слици је приказано утврђивање облика троугла упоређивањем са угловима са моделом правог угла.

У даљем раду осмишљавање класификације троуглова према угловима врши се преко цртања троугла датог облика. Цртање треба да се оствари тако што при цртању правоуглог, односно тупоуглог троугла, ученици прво цртају прав угао (туп угао), што је основна одлика тог облика троугла, а затим краци нацртаног угла се секу са правом (слика).

У трећем разреду, ученици први пут цртају троугао према заданим дужинама страница. То су први елементи конструкције који ученици изводе у настави математике. Припремна активност за цртање троуглова према датим дужинама страница је: мерење дужине дате дужи са шестаром и његово преношење, цртање кружнице познатог пречника, мерење и упоређивање страница датог троугла помоћу шестара.

При задаци односе се на конструкцију троугла са датим дужинама све три странице троугла.

Пример: Нацртати троугао чије су странице $AB = 4\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$.

Цртање изводимо на следећи начин:

- цртамо дуж чија је дужина 4cm и означавамо је са AB ,
- са центром у тачки A и полупречника 3cm цртамо кружни лук (део кружнице),
- са центром у тачки B и полупречника 5cm цртамо други кружни лук до пресека са првим луком (слика).

Пресек ова два кружна лука одређује треће теме траженог троугла које означавамо са C .

Први задаци за цртање троугла раде се тако што наставник демонстрира цртање на таблу, а паралелно са њим, ученици изводе цртање у свескама, придржавајући се етапа демонстрације наставника. После тога, ученици самостално решавају неколико задатака, а наставник прати њихов рад, контролише и даје потребна упутства.

У наредним задацима странице троугла који треба да се нацрта, задате су као дужи (слика).

Приликом решавања задатака овог типа, наставник треба да упути ученике како се мере странице троугла и да укаже на аналогију решавања задатака претходног типа, односно сада странице се не мере са лењиром већ са задатим дужима, а поступак се изводи као код решавања претходног задатка.

Приликом задавања задатака за цртање троуглова према дужини све три странице, треба водити рачуна за релацију између страница троугла – свака страница је мања од збира друге две стране, а већа од разлике друге две странице. Тиме се обезбеђује да задатак има јединствено решење, будући да са ученицима трећег разреда није могућа дискусија када задатак има (или нема) решење, јер њихово предзнање и узраст не дозвољавају те претпоставке.

6. МЕЋУСОБНИ ПОЛОЖАЈ ГЕОМЕТРИЈСКИХ ПОЈМОВА

6.1. Међусобни положај тачке, праве и равни

Приликом обраде садржаја из ове теме акценат се ставља на формирање просторних претстава ученика за међусобне односе основних геометријских појмова у простору. Осмишљавање ових садржаја подразумева примену одговарајућих наставних средстава, будући да цртежи нису довољни да се формирају одговарајуће просторне претставе код ученика. За такву пригоду погодни су картони у облику правоугаоника или

паралелограма, као замена за раван и жичани модели праве. Притом, као придружена средства треба да се узму и криве површине, лопта, ваљак, купа, ради упоређивања разлике равне и криве површине и за осмишљавање равне површине и равни.

Тачка, права и раван су основни геометријски појмови и као текви се не дефинишу, већ се објашњавају преко изучавања њихових својстава и међусобних односа.

Међусобне положаје тачке и равни показују се на моделу. Конкретно, на моделу равни од картона, означавају се неколико тачака (слика). За те тачке констатује се да припадају равни. Међутим, уочавају се и тачке које не припадају равни. Када се заврши дискусије да ли може да има неки трећи случај (тачка лежи у равни, тачка не лежи у равни), констатује се да тачка и раван могу имати следеће узајамне положаје: тачка лежи у равни или тачка не лежи у равни.

Тако се уводи и аксиома: Раван је скуп бесконачно много тачака, али за сваку раван постоје тачке које бу не припадају.

Међусобни положај праве и равни, исти тако, прво се показује на моделу праве и равни (картон и жица), а затим се ти положаји преносе на цртеж. Приликом демонстације положаја праве која лежи у равни, обележава се са две тачке у равни и саставља права која пролази кроз те две тачке (слика).

Тиме се уводи аксиома: Права лежи у равни ако има две заједничке тачке са том равни. На сличан начин демонстрира се полпжај праве и равни када имају једну заједничку тачку, модел праве поставља се у таквом положају да права "пробада" раван (слика). Притом се констатује да прама и раван могу да имају само једну заједничку тачку, тј. тада права продире раван, а заједничка тачка је продор.

На крају се тражи положај када праа и раван (картонски модел равни) немају заједничких тачака. Када моделе праве и равни поставимо тако (слика), речником ученика каже да "колико год да се продужи права, неће имати заједничку тачку са равни". Тиме се потенцира бесконачност праве и равни, али и међусобни положај нема заједничких тачака. Тада се каже да су права и раван паралелни.

Задаци за међусобни положај праве и равни погодни су за осмишљавање значења везника "и" и "или". За тај циљ нарочито су погодни случајеви када права продире раван. Тако, на слици, тачка А лежи на правој и у равни.

У вези са овим цртежом није тачан исказ: "Тачка В лежи на правој и у равни" будући да она лежи на правој, али не лежи у равни (јединствена заједничка тачка праве и равни је тачка А). Међутим, тачан је исказ: "Тачка С лежи на правој или у равни" будући да заиста тачка С лежи у равни, али за дисјункцију је довољан један исказ да је тачан, па је и она тачна.

Узајамни положај две равни демонстрира се са моделима равни од картона или другог материјала који су израђени тако да се може приказати две равни које се секу (слика).

Значајно је притом да се уочи да две равни имају заједничку праву која се назива пресечна права.

Због сиромашног искуства ученика за преношење просторних односа у једној равни, не треба практикаовати да ученици цртају равни које се секу.

Паралелне равни се такођр приказују са моделима а затим и цртежом (слика). За њих је битно да се уочи да немају заједничких тачака.

Посматрањем, ученици треба да закључе да две различите равни могу да:

- немају заједничких тачака, тада су узајамно паралелне,

- имају заједничку праву, тада се секу и
- се поклавају.

Поклапање равни може се приказати помоћу модела равни, тако што једну раван означимо са три тачке које не леже на истој правој, а затим се постави друга раван тако да и у њој припадају означене тачке (слика). Код ученика се намеће закључак да у том случају све тачке ове две равни су заједничке.

6.2. Специјални положај праве и равни

При увођењу специјалних положаја праве и равни у простору (хоризонтални, вертикални, коси), треба да се користе примери из непосредне околине ученика. Притом треба уочити и одређену редослед при увођењу положаја. Прво треба да се уведе појам хоризонталног положаја, због чињенице да се може практично показати, а демонстрација привући пажњу ученика и са тим задаје просторна претстава за хоризонталну раван. Наиме, хоризонтални положај приказује се помоћу стакленог или провидног пластичног суда, у коме има воде до одређене висине. Ученици уочавају да слободна површина воде у суду је "равна". Ако се подигне један или други крај суда, слободна површина воде поново остаје "равна", односно задржава исти положај (слика).

Слободна површина мирне воде назива се **водоравна** или хоризонтална. Раван "која има положај као слободна површина мирне воде у суду" (хоризонтални положај) назива се хоризонтална раван. Свакако, то треба показати са неколико модела равни који се постављају тако да буду паралелни са слободном површином воде у суду.

После увођења појма хоризонталне равни, ученици се упознају са либелом, као направу за одређивање да ли је једна раван хоризонтална или није. Међутим, у објашњавању примене либеле треба да се укаже да она треба да се постави у равни барем у два положаја који нису паралелни између себе.

Судове који се користе за увођење појмова хоризонталног положаја и хоризонталне равни треба искористити и за увођење појма хоризонталне праве. Наиме, на слободној површини воде у суду пажљиво се поставља сламка, много танак штапић или слични предмети који могу да замене модел праве који пливају на површини воде. Затим се уочава да "праве" леже у хоризонталној равни. Када је то направљено, наставник исказује дефиницију: "За праву која лежи у хоризонталној равни каже се да је хоризонтална права".

Ако се у суду постави више модела праве, може се уочити и узајамни положај који могу имати две хоризонталне праве (да се секу, да су паралелне или да се поклапају).

Увођење појмова верикалне праве и вертикалне равни, исто тако, врши се демонстрацијом примера из непосредне околине ученика, међутим, треба ићи одрнутим редом – првосе уводи појам ветриклане праве а затим вертикалне равни. Појам верикалне праве уводи се приказивањем положаја конце који је на горњем крају причвршћен а доњи крај има тег, са тегом конач се затеже (слика). Тај положај приказује се више пута, односно са више канапа, да би се извело уопштавање. Том приликом показује се положај када конач се изводи из равнотеже у извесно "нихање" тега, конач поново стаје у првобитном положају. Тако, ученици упознају и висак. За конач се каже да је у вертикалном положају. Права, пак, која заузима вертикални положај назива се вертикална права. Раван на којој лежи вертикална права назива се вертикална раван, а очигледно се приказује помоћу конца виска и картона као модела праве, односно равни (слика). Погодно је притом, помоћу виска утврдити да зидиви учионице, или пак, табла, је у вертикалном положају.

Помоћу модела равни, виска и жичаних модела праве, издвајамо праве које нису ни хоризонталне, нити вертикалне, а које називамо косе праве, а равни које нису нити хоризонталне нити вертикалне, називамо косе равни.

Да би се направила конкретнија разлика између специјалних облика правих, погодно је да наставник нацрта на табли по један од свих облика положаја. Да је права a хоризонтална утврђује се помоћу либеле, а да је права b вертикална помоћу виска. Тада права c , остаје очигледно, да није хоризонтална, нити вертикална, а то значи да је коса права.

Ученицима треба указати да све праве које цртају у свескама, када се оне на клепи, су хоризонталне. Међутим, рачунаћемо да праве које су паралелне са доњом или горњом основом свеске, хоризонталне, оне које су паралелне са леве и десне ивице, су вертикалне, док оне које нису нити хоризонталне нити вертикалне, су косе праве.

После упознавања ученика са специјалним облицима правих и равни, следе активности обраде њихових узајамних положаја. Тако, пре свега, мисли се на задатке дефинисања узајамног положаја специјалних облика правих, правих и равни и равни, као што су:

- какви узајамни положаји могу имати две хоризонталне праве,
- какви узајамни положај могу заузимати једна хоризонтална права и једна вертикална права,
- какви узајамни положаји могу заузимати једна хоризонтална права и једна хоризонтална раван и сл.

При решавању оваквих задатака потребно је узајамне положаје приказивати помоћу модела и то све узајамне положаје који се могући.

6.3. Међусобни положај две праве у равни

При увођењу узајамног положаја две праве које леже у истој равни, полази се од анализе цртежа на коме у једној равни леже више правих (слика). Приликом анализирања цртежа уочава се да неке од правих немају заједничких тачака, друге имају и то само једну. На слици праве a и b имају заједничку тачку, а исти је случај и са правама c и d . За праве које леже у истој равни а немају заједничких тачака каже се да су паралелне. Праве a и f имају заједничку тачку A ; b и f – B , c и e – C , односно d и e – D . За праве које имају само једну заједничку тачку кажемо да се секу, а заједничка тачка назива се пресечна тачка или кратко пресек.

Много пажње треба посветити при увођењу положаја када се две праве поклапају. Погодно за то је да се направи са означавањем две тачке, а затим се те праве поклопе према истим тачкама (слика). Ученици ће притом уочити да је усуштини нацртана једна права, односно две праве које се поклапају. Битно је да се уочи да за те две праве нису заједничке само означене тачке, већ све су тачке заједничке.

Када ученици упознају узајамне положаје две праве које леже у истој равни, посебно се разматрају праве које се секу. Том приликом, ученици се усмеравају на углове које образују праве које се секу. На слици, праве a и b образују два оштра и два тупа угла, док праве c и d образују четири права угла, што утврђујемо помоћу правог угла на троугаонику.

На основу тога дефинише се: Ако се праве секу и образују прав угао, кажемо да су то узајамно нормалне праве. При дефинисању узајамно нормалних правих, не треба

напомунути да оне леже у истој равни, будући да две праве које се секу леже у истој равни.

Мерењем углова између правих које се секу врши се припрема за цртање узајамно нормалних правих. Том приликом ученике треба оспособити да цртају праву која је нормална на дату праву и пролази кроз дату тачку на правој (слика).

Цртање паралелних правих теже се практично изводи, па зато, ученике треба добро упутити у технику цртања, а посебно да се обрати пажња за руковање прибором. У том циљу наставник црта и истовремено гласно исказује деловање које извршава: "нека је потребно да нацртамо праву b (n) паралелну са датом правом a (m). Постављамо троугаони лењир са једне његове стране на дату праву (слика). Са левом руком узимамо други лењир (троугаони или обичан) и постављамо уз страну троугаоног лењира који је са наше леве стране. Први троугаони лењир "клизи" по другом док не дође у положај где хоћемо да нацртамо праву b (n). Тада левом руком придржавамо оба лењира, а са десном цртамо праву b (n), која је паралелна са датом правом. Приликом оваквог цртања указује се да овим начином можемо нацртати много правих које су паралелне са правом a (m).

Будући да техника цртања тражи увежбавање, да би је ученици савладали, треба извести више вежби под контролом наставник, али самосталним извођења кретања прибора.

7. ПОВРШИНА ГЕОМЕТРИЈСКИХ ФИГУРА

Појам површине

У математици појам површине је основни појам и као такав се не дефинише, већ осмишљава преко неких његових својстава. Тако, за површину било ког многоугла може се прихватити следеће својство:

- површина P датог многоугла је сваки позитиван број, тј. $P > 0$,
- површина многоугла не зависи од његовог места-положаја, тј. подударни многоуглови имају једнаке површине,
- ако је многоугао састављен од два или више многоуглова, тада његова површина је збир површина делова,
- за квадрат странице $1m$ ($1cm$, $1dm$, итд.) узимамо да има површину $1m^2$ ($1cm^2$, $1dm^2$, итд.).

То се аксиоме за површину, међутим, при обради то не образлажемо, већ преко активности у вези са наведеним својствима, ученици интуитивно треба да прихвате.

Деца још у предшколском узрасту, а посебно у првом разреду, врше упоређивање разних фигура по величини – квадрате, правоугаонике, троуглове, кругове. Тим активностима ученици уочавају да, нпр. дати квадрат је већи од круга, два правоугаоника имају једнаке површине (ако се ставе један преко другог, поклавају) и сл. Зато формирање појма површине треба започети са тим активностима. Тако, они на датом цртежу треба да уоче да троугао може да се цео смести у круг (слика).

Тада се може истаћи да "троугао има мању површину од круга, односно круг има већу површину од троугла".

Одмах затим, ученицима треба задати активности у којима цртају:

- два правоугаоника од којих један има већу површину од другог,
- два круга од којих један има мању површину од другог.

После тога, преко одговарајућих примера показати подударне фигуре које могу да се направе преко осне симетричне фигуре (слика).

Ученике потсетити да ако лист савијемо по оси симетрије, тада делови А и В ће се потпуно поклопити и за такве делове кажемо да су подудатни. Касније се истиче да подударне фигуре имају једнаке површине. Као активност из које ученици схватају ово својство, треба практиковати резање од хартије или картона подударне фигуре, при чему се њихови поклапањем констатује да имају једнаке површине. Активности треба да продуже цртањем подударних фигура у свескама са квадратићима, уз напомену да су квадратићи подударни тј. имају једнаку површину. Бројањем квадратића од којих је састављена фигура води ка придруживању позитивног броја фигури, са којим у суштини изражава његову површину (са јединицом – квадратић) (слика).

Када се реализују активности преко којих је уочено да подударне фигуре имају јаднаке површине, следе активности преко којих треба да сагледа да неке фигуре могу да имају једнаке површине, а да нису подударне. Т може да се изведе преко анализе цртежа и са постављеним питањем (слика):

- Које од следћих фигура има једнаке површине?
- Које од фигура има једнаку површину са фигуром В?
- Које од фигура има мању површину од фигуре В?

У вези са претходним активностима може да се продужи цртање различитих фигура у свакама са квадратићима, при чему се прво црта једна фигура, а затим друга која има исту површину као прва, да се нацртају различите фигуре, али свака да садржи 20 квадратиће и сл.

Као припремна активност за увођење ученика за израчунавање површине правоугаоника, треба да буде израчунавање колико квадратића има дати правоугаоник, при чему треба да се потсети на множење квадратића у једном реду са бројем редова (слика).

Површина правоугаоника

Пре увођења појма површине правоугаоника, потребно је ученике потсетити на нека својства правоугаоника, посебно да: наспрамне странице су једнаке, углови прави, а обим $L = 2a + 2b$. Поред тога, ученици треба да се потсети за мерење дужи и мерне јединице која се примењује, обично 1 cm, при чему треба обратити пажњу на мерни број и мерну јединицу.

Пример: У запису 8 cm, 8 је мерни број, а cm мерна јединица.

Појам квадратног центиметра (1 cm^2) треба увести као потребу, односно уместо да се понекад броје мали, некада већи квадратићи, као што је чињено раније. Тако ће се постићи мерење површине са јединственом мерном јединицом. Затим се црта квадрат чија је страница један центиметар и називамо га квадратни центиметар и означавамо са 1 cm^2 . Одмах потом ученицима се даје задатак да одреде површину неког правоугаоника, који је подељен на квадратиће по 1 cm^2 (слика).

Да би се дошло до формуле за израчунавање површине правоугаоника, тј. $P = a \cdot b$, треба ићи поступно, преко илустрације као на слици (слика). Ученици наводе најједноставнији начин, пребројавање квадратића у правоугаонике, у једном реду има 4 cm^2 , 3 реда по 4 cm^2 је 12 cm^2 . На другом цртежу одређује се број квадратних центиметара у првом реду (има их 5) и утврђује се да има 3 таква реда, а површина је $5 \cdot 3 = 15 \text{ cm}^2$. У правоугаонику под в) означени су центиметри по дужини и ширини, а ученици сами

утврђују колико квадратних центиметара има у првом реду и колико таквих редова има, а у правоугаонику под г) ученици сами мере димензије правоугаоника. Овде се уводе и појмови дужина и ширина и истиче да се оне називају димензије правоугаоника.

На основу претходних активности и уочавања у њима, врши се генерализација, тј. површина правоугаоника је производ његових димензија, дужине и ширине, односно $P = a \cdot b$.

Записивање при решавању задатака треба бити на следећи начин: У правоугаонику (слика) чија је дужина 8cm, а ширина 3cm, површина му је $P = (8 \cdot 3) \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$.

Одмах после извођења формуле за површину правоугаоника, са циљем да се запамти, ученицима треба задати задатке следећег типа.

Пример: Одредити површину правоугаоника са димензијама: $a = 10 \text{ cm}$ и $b = 8 \text{ cm}$.

Ученике навикавати да задатке записују без текста, на следећи начин:

$$a = 10 \text{ cm,}$$

$$b = 8 \text{ cm,}$$

$$P = ?$$

За боље памћење мерне јединице 1 cm^2 потребно је да се ради са њима, код ученика на клупи да постоји модел те мерне јединице, израђен од картона или тврде хартије. Увођење других мерних јединица за површину треба повезати са потребом мерења већих и мањих површина. Мерну јединицу 1 dm^2 сваки ученик треба да има нацртан у свесци, да тиме стиче претставу за њу, док 1 m^2 треба да има у учионици и на том моделу, помоћу конца или жице, буде истакнути квадратни дециметар. На тај начин практично се показује однос квадратног метра и квадратног дециметра. На исти начин квадратни дециметар треба да буде подељен на квадратне центиметре. Мерну јединицу 1 a треба трасирати у школском дворишту или на неком другом погодном месту, где је могуће анализирати ту јединицу (зато што је то квадрат са страницом 10 m и има 100 m^2).

Да би се боље схватио однос између мерних јединица, као и нужности изражавања димензија правоугаоника у истим мерним јединицама при израчунавању површине, треба практиковати и задатке у којима су димензије правоугаоника дате у различитим мерним јединицама.

Пример: Израчунати површину правоугаоника дужине 35 cm и ширине 2 dm ((или димензије 2 m 5 dm и ширине 45 dm), при чему се наглашава у којим мерним јединицама треба исказати резултат, будући да ту најчешће је могуће само мање мерне јединице.

За задавање проблемске ситуације треба да се задају задаци за одређивање површине фигура које могу да се разбију на два или више правоугаоника а дељење вршити на различите начине (слика).

Поред задатака за израчунавање површине правоугаоника, срећемо и обрнуте задатке – да се израчуна једна димензија правоугаоника, ако ју познате површина и друга димензија.

Пример: Израчунати дужину правоугаоника ако је површина 54 cm^2 и ширина 6 cm.

Приликом решавања оваквих задатака полази се од формуле и у њој замене познате величине, а затим анализира добије израз.

$$P = a \cdot b, 54 = a \cdot 6.$$

Непознати је чинилац: $a = 54 : 6$, односно $a = 9 \text{ cm}$.

У интересу је, постављати задатке и овог типа.

Пример: Нацртај правоугаоник чија је површина 12cm^2 а мерни бројеви страница природни бројеви.

У задатку се траже сва решења, односно сви парови природних бројева чији је производ 12. Значи задатак има више решења: 12cm и 1cm; 6cm и 2cm; 4cm и 3cm.

Пример: Обим једног правоугаоника је 18cm, колико може бити његова површина?

Пошто је по формули обим правоугаоника $O = 2a + 2b$, то је:

$2a + 2b = 18$, односно $a + b = 9$, па према том решењу, парови су:

1cm и 8cm; 2cm и 7cm; 3cm и 6cm; 4cm и 5cm, односно површина може бити:

$(1 \cdot 8)\text{cm}^2 = 8\text{cm}^2$, $(2 \cdot 7)\text{cm}^2 = 14\text{cm}^2$, $(3 \cdot 6)\text{cm}^2 = 18\text{cm}^2$, $(4 \cdot 5)\text{cm}^2 = 20\text{cm}^2$.

Из ове наставне материје може се поставити велики број разноврсних задатака из свакодневног живота. Том прилоком треба водити рачуна да појмови који се користе ученицима буду блиски.

Сложеније типове задатака за израчунавање површине правоугаоника, ако се не решавају са целим разредом, треба их решавати са оним ученицима који показују већи интерес и способнији су за математику су следећег тима.

Међу задацима за израчунавање површине правоугаоника, посебну пажњу треба посветити оним садржајима из свакодневног живота практичног карактера. Тако, може се израчунавати површина њива, просторија са обликом правоугаоника, израчунавање површине стана чији је облик правоугаоник и сл.

Површина квадрата

У припремним активностима за обраду овог наставног садржаја, слично како код правоугаоника, треба обновити својства квадрата (углови су му прави и странице једнаке) као и поступак одређивања обима квадрата. Површину квадрата ученици ће одредити аналогно површини правоугаоника. Зато се може почетим задатком типа: Израчунај површину сваког квадрата на слици.

Решавање ових задатака може бити на основу бојјења квадратних центиметара, или множењем дужине и ширине, где треба нагласити да су једнаке, зато што ту једнакости користимо за извођење формуле за израчунавање површине квадрата. Будући да се квадрат дефинише као правоугаоник са једнаким страницама, то значи да се на квадрат може применити формула за израчунавање површине правоугаоника. Том приликом, будући да су странице квадрата једнаке између себе и означавају са a ,

$$P = a \cdot a \text{ или } P = a^2.$$

За осмишљавање израчунавања површине квадрата треба практиковати следеће типове задатака:

- израчунавање површине квадрата према датим страницама,
- израчунавање површине квадрата према датом обиму, (у овом типу задатака из обима одређује се страница a затим израчунава површина),
- практични задаци израчунавања површине фигура објеката облика квадрата (њива, сто, плоча и сл.).

После тога следе сложенији задаци са објашњавањем према одговарајућим могућностима ученика.

Пример: Дата је површина квадрата 36cm^2 . Израчунати његову страницу и обим?

Мерни број странице је број помножен самим собом даје:

$$a \cdot a = 36, \text{ то је } a = 6\text{ cm}, \text{ а } O = 4 \cdot 6 = 24\text{ cm}.$$

Пример: Колико пута се повећава обим квадрата ако се његова страница повећава редом: 2, 3, 4 пута?

Ако је $a = 5$ cm тада је $O = 4 \cdot a$, $O = 4 \cdot 5 = 20$ cm. Страница квадрата се увећа два пута, па је:

$$O_1 = 4 \cdot (2 \cdot 5) = 4 \cdot 10 = 40 \text{ cm тј.} \\ O_1 = 2 \cdot O$$

Пример: Колико пута се повећава површина квадрата ако се његова страница повећава 2, 3, 4, пута редом?

Ако је $a = 5$ cm тада, применом формуле за површину добијамо да се површина увећава редом: 4, 9 и 16 пута.

Површина квадра

У припремним активностима за обраду овог наставног садржаја треба актуелизовати знања ученика за квадар која се неопходна за схватање поступка израчунавања његове површине, као што су: узајамна веза између ивица, односно једнакост четири наспрамне ивице које уочавамо на жичаном моделу квадра, једнакост наспрамних страна квадра, стране квадра су правоугаоници, што не искључује могућност да буду квадрати.

Погодно је да сваки ученик испред себе има мрежу квадра, која је дата у прилогу уџбеника или такву мрежу израдити на часу.

Посматрањем модела квадра на почетку часа, треба да се нагласе димензије квадра: дужина, ширина и висина. Те димензије касније треба означити на мрежи квадра, при чему се уочавају, у суштини, димензије на свакој страни квадра.

Формула може да се изведе коришћењем цртежа у уџбенику који је дат са тим циљем, или се црта мрежа квадра као припремни задатак.

Тако, ако се крене од мреже, на којој су означене дужине ивица са a , b и c , за сваки правоугаоник утврђује се колико износи његова површина (слика). На основу слике:

$$I - a \cdot b, II - a \cdot c, III - a \cdot b, IV - a \cdot c, V - b \cdot c, VI - b \cdot c.$$

Уочавањем да два по два правоугаоника имају једнаке површине, записујемо формулу:

$$P = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c.$$

Притом, површина квадра израчунава се: прво се израчунавају површине свих правоугаоника, затим се сабирају и добија површина квадра, а затим и применом формуле.

Рад са формулом претставља одређену потешкоћу за ученике, зато треба на почетку задавати задатке лакше за решавање.

Пример: Израчунати површину квадра чије су димензије: $a = 5$ cm, $b = 8$ cm и $c = 4$ cm.

Применом формуле $P = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$, добијамо да је:

$$P = (2 \cdot 5 \cdot 8 + 2 \cdot 5 \cdot 4 + 2 \cdot 8 \cdot 4) \text{ cm, } P = (80 + 40 + 64) \text{ cm, } P = 184 \text{ cm.}$$

Уколико је учионица има облик квадра, свакако треба јој одредити површину. У том циљу разред треба поделити у групе и после завршеног рада упоредити резултате.

Површина коцке

После свега што је урађено у вези са одређивањем површине квадрата и квадра, до појма површине коцке, ученици треба самостално да дођу. Али пре тога, неопходно је извршити понављање за стране коцке, са истицањем да су све стране коцке мешусобно подударне и да су квадрати.

Треба настојати да ученици сами открију формулу за површину коцке, анализом њене мреже.

Том анализом ученици уочавају да површина коцке је збир површина шест подударних квадрата, односно:

$$P = a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a, \text{ или}$$

$$P = 6 \cdot a \cdot a, \text{ које може да се запише као } P = a^2.$$

Поред других задатака, ученицима треба задавати да одређују површину модела коцке из прилога у уџбенику и површину неке кутије облика коцке.

Приликом решавања задатака применом формуле за израчунавање површина коцке, треба водити рачуна на начин записивања. Тако, треба израчунати површину коцке са ивицом $a = 8 \text{ cm}$, поступамо на следећи начин:

$$a = 8 \text{ cm},$$

$$P = ?$$

$$P = 6 \cdot a \cdot a$$

$$P = (6 \cdot 8 \cdot 8) \text{ cm}^2$$

$$P = 384 \text{ cm}^2.$$