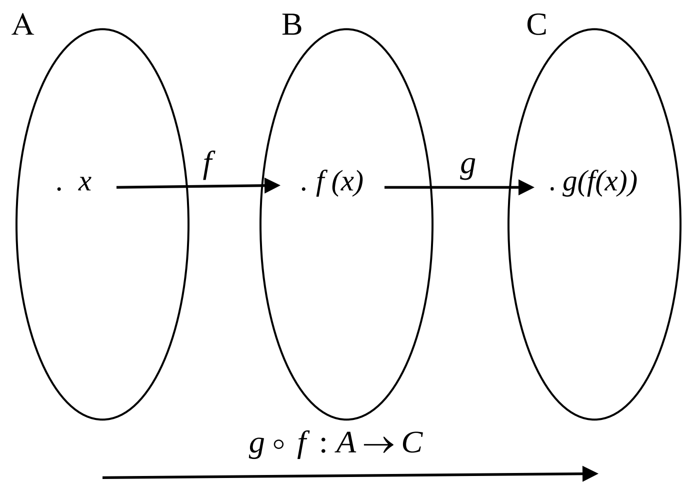
ПРОИЗВОД ПРЕСЛИКАВАЊА

<u>Дефиниција</u>: Нека су A, B и C непразни скупови и $f : A \to B$, $g : B \to C$. Тада пресликавање $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ такво да $g \circ f : A \to C$ називамо <u>производ, композиција или сложена функција</u> пресликавања f и g.



У скупу A постоји елемент x који се пресликавањем f пресликава у елемент $f(x)$ у скупу B. У овом случају елемент x је оригинал и он припада скупу A, односно домену пресликавања. Елемент $f(x)$ је слика елемента x и он припада скупу B, односно кодомену пресликавања f.

Ако сада посматрамо пресликавање g видимо да је домен овог пресликавања скуп B, а кодомен пресликавања скуп C тј. $g : B \to C$. Сада је елемент $f(x)$ који се налази у домену B оригинал, а елемент $g(f(x))$ је његова слика која припада скупу C.

ЗАДАЦИ

1. Функције $f : R \to R$ и $g : R \to R$ дефинисане су на следећи начин:

   $$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = 3x + 5.$$

   Наћи: $(g \circ f)(1)$, $(g \circ f)(-2)$, $(f \circ g)(-1)$, $(f \circ g)(a)$.

<u>Решење:</u> На основу дефиниције производа пресликавања имамо да је $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, сада је:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\underbrace{2x+1}_{f(x)}) = 3(2x+1)+5 = 6x+3+5 = 6x+8$$

Сада је $(g \circ f)(1) = 6 \cdot 1 + 8 = 14$ (уместо x замењујемо 1)

$(g \circ f)(-2) = 6 \cdot (-2) + 8 = -12 + 8 = -4$ (уместо x замењујемо -2)

На основу дефиниције производа пресликавања је:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+5) = 2(3x+5)+1 = 6x+10+1 = 6x+11$$

За $x = -1$ је $(f \circ g)(-1) = 6 \cdot (-1) + 11 = -6 + 11 = 5$

За $x = a$ је $(f \circ g)(a) = 6 \cdot a + 11$ при чему је $a = const.$

2. Функције $f : R \to R$ и $g : R \to R$ дефинисане су на следећи начин:

$$f(x) = x^2 + 1, \qquad g(x) = x^2 - 2x.$$

Наћи: $(g \circ f)(5)$, $(g \circ f)(-2)$, $(f \circ g)(3)$, $(f \circ g)(-4)$.

<u>Решење</u>: На основу дефиниције производа пресликавања имамо да је $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, сада је:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = (x^2+1)^2 - 2(x^2+1) = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2 - 2x^2 - 2$$
$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 2 = x^4 - 1$$

$(x^2+1)^2$ се решава помоћу формуле за квадрат бинома: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Сада је $(g \circ f)(5) = 5^4 - 1 = 625 - 1 = 624$ (x замењујемо са 5)

$$(g\circ f)(-2)=(-2)^4-1=16-1=15.$$

На основу дефиниције производа пресликавања је:

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-2x)=(x^2-2x)^2+1=(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot(-2x)+(-2x)^2+1$$
$$=x^4-4x^3+4x^2+1$$
$$(f\circ g)(3)=3^4-4\cdot 3^3+4\cdot 3^2+1=81-108+36+1=118-108=10$$
$$(f\circ g)(-4)=(-4)^4-4(-4)^3+4(-4)^2+1=256+256+64+1=577$$

> Овде је $(-4)^3=(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)=-64$
>
> Док је $(-4)^2=(-4)\cdot(-4)=16$
>
> Негативан број на непарном степену је негативан.
>
> Негативан број на парном степену је позитиван.
>
> Непарни степени су 1,3,5,...
>
> Парни степени су 2,4,6,...

3. Нека су $f(x)=2x+1$ и $g(x)=x^2+x+1$. Одредити: $(g\circ f)(x)$, $(f\circ g)(x)$, $(g\circ g)(x)$, $(f\circ f)(x)$.

<u>Решење:</u>

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+1)=(2x+1)^2+(2x+1)+1=4x^2+4x+1+2x+1+1$$
$$=4x^2+6x+3$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+x+1)=2(x^2+x+1)+1=2x^2+2x+2+1=2x^2+2x+3$$
$$(g\circ g)(x)=g(g(x))=g(x^2+x+1)=(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)+1$$
$$=(x^2+x+1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)+1$$
$$=(x^4+x^3+x^2+x^3+x^2+x+x^2+x+1)+x^2+x+2$$
$$=x^4+2x^3+3x^2+2x+1+x^2+x+2$$
$$=x^4+2x^3+4x^2+3x+3$$
$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2x+1)=2(2x+1)+1=4x+2+1=4x+3.$$

4. Пресликавања f и g дефинисана су на следећи начин:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5, \quad g(x) = 4x + 5$$

Одредити $f^2(x)$ и $g^2(x)$.

<u>Решење</u>:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2 - 4x + 5) = (x^2 - 4x + 5)^2 - 4(x^2 - 4x + 5) + 5 \\ &= (x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x + 5) - 4x^2 + 16x - 20 + 5 \\ &= x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x^3 + 16x^2 - 20x + 5x^2 - 20x + 25 - 4x^2 + 16x - 15 \\ &= x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x - 10 \end{aligned}$$

$$g^2(x) = (g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(4x+5) = 4(4x+5) + 5 = 16x + 20 + 5 = 16x + 25.$$

5. За пресликавања $f(x) = 4x - 6$ и $g(x) = 3x^2 + 4x$ наћи:

а) $f(g(x))$ ц) $f(2 + f(1))$

б) $g(-10x + 5f(x))$ д) $g(x + f(0))$.

<u>Решење:</u>

а) $f(g(x)) = f(3x^2 + 4x) = 4(3x^2 + 4x) - 6 = 12x^2 + 16x - 6$

б) $$\begin{aligned} g(-10x + 5f(x)) &= g(-10x + 5(4x - 6)) = g(-10x + 20x - 30) = g(10x - 30) \\ &= 3(10x - 30)^2 + 4(10x - 30) = 3(100x^2 - 600x + 900) + 40x - 120 \\ &= 300x^2 - 1800x + 2700 + 40x - 120 \\ &= 300x^2 - 1760x + 2580 \end{aligned}$$

ц) $f(2 + f(1)) = f(2 + 4 \cdot 1 - 6) = f(2 + 4 - 6) = f(0) = 4 \cdot 0 - 6 = -6$

д) $$\begin{aligned} g(x + f(0)) &= g(x + 4 \cdot 0 - 6) = g(x - 6) = 3(x - 6)^2 + 4(x - 6) \\ &= 3(x^2 - 12x + 36) + 4x - 24 = 3x^2 - 36x + 108 + 4x - 24 \\ &= 3x^2 - 32x + 84 \end{aligned}$$

6. Ако су дати скупови $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c\}$ и $C = \{5,6,7\}$, и пресликавања $f : A \to B$ и $g : B \to C$ дефинисана са $f : \begin{pmatrix} 123 \\ abc \end{pmatrix}$, $g : \begin{pmatrix} abc \\ 765 \end{pmatrix}$. Одредити $g \circ f$.

Решење:

$g \circ f : A \to C$

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = 7$
$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = 6$
$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(c) = 5$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 123 \\ 765 \end{pmatrix}$$

Када је пресликавање дефинисано на следећи начин:

$$f : \begin{pmatrix} 123 \\ abc \end{pmatrix}$$

Ово значи да се 1 пресликава у a, 2 се пресликава у b, а 3 се пресликава у c.

У првом реду су оригинали (1,2,3) док су у другом реду њихове слике (a,b,c).

Када се одређује нпр. $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = 7$

$f(1)$ се одређује из $f : \begin{pmatrix} 123 \\ abc \end{pmatrix}$, види се да се 1 пресликава у a

$g(a)$ се одређује из $g : \begin{pmatrix} abc \\ 765 \end{pmatrix}$, одавде се види да се a пресликава у 7

7. Нека су дати скупови $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b\}$ и $Z = \{d,e,k\}$. Дата су и пресликавања $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$ дефинисана на следећи начин:

$$g : \begin{pmatrix} 123 \\ abb \end{pmatrix}, \quad f : \begin{pmatrix} ab \\ ek \end{pmatrix}$$

Наћи производ пресликавања $h = f \circ g$.

<u>Решење</u>:

$h = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \qquad h: X \to Z$

$$h(1) = f(g(1)) = f(a) = e$$
$$h(2) = f(g(2)) = f(b) = k \qquad h:\begin{pmatrix}123\\ ekk\end{pmatrix}$$
$$h(3) = f(g(3)) = f(b) = k$$

8. Дате су функције f и g на следећи начин:

$$f:\begin{pmatrix}abc\\ rqp\end{pmatrix} \text{ и } g:\begin{pmatrix}pqr\\ uvz\end{pmatrix}$$

Одредити: $(g \circ f)(a)$, $(g \circ f)(b)$.

<u>Решење</u>:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(r) = z$$
$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(q) = v$$

9. Дат је скуп $A = \{1,2,3,4,5\}$ и пресликавање $f: A \to A$ дефинисано на следећи начин:

$$f:\begin{pmatrix}12345\\ 23451\end{pmatrix}$$

Одредити: f^2, f^3 и f^{-1}.

<u>Решење</u>:

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$f^2(1) = (f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2) = 3$$
$$f^2(2) = (f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(3) = 4$$
$$f^2(3) = (f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(4) = 5$$
$$f^2(4) = (f \circ f)(4) = f(f(4)) = f(5) = 1$$
$$f^2(5) = (f \circ f)(5) = f(f(5)) = f(1) = 2$$

$$f^2 : \begin{pmatrix} 12345 \\ 34512 \end{pmatrix}$$

Овде се у првом реду налазе редом елементи скупа A, у другом реду су слике датих елемената које смо добили израчунавањем.

$f^3(x) = f\left(f^2(x)\right)$
$f^3(1) = f\left(f^2(1)\right) = f(3) = 4$
$f^3(2) = f\left(f^2(2)\right) = f(4) = 5$
$f^3(3) = f\left(f^2(3)\right) = f(5) = 1$
$f^3(4) = f\left(f^2(4)\right) = f(1) = 2$
$f^3(5) = f\left(f^2(5)\right) = f(2) = 3$

$$f^3 : \begin{pmatrix} 12345 \\ 45123 \end{pmatrix}$$

Када се одређује нпр. $f^3(1) = f\left(f^2(1)\right) = f(3) = 4$

$f^2(1)$ читамо из $f^2 : \begin{pmatrix} 12345 \\ 34512 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $f(3)$ читамо из $f : \begin{pmatrix} 12345 \\ 23451 \end{pmatrix}$

f^{-1} - инверзно пресликавање пресликавања f

$f^{-1}(1) = 5$
$f^{-1}(2) = 1$
$f^{-1}(3) = 2$
$f^{-1}(4) = 3$
$f^{-1}(5) = 4$

$$f^{-1} : \begin{pmatrix} 12345 \\ 51234 \end{pmatrix}$$

Када се одређује нпр. $f(1)$ из $f:\begin{pmatrix}12345\\23451\end{pmatrix}$ $\Downarrow$

онда се 1 из првог реда пресликава у 2 у другом реду (оригинали су у првом реду, слике у другом реду).

Када се одређује нпр. $f^{-1}(5)$ из $f:\begin{pmatrix}12345\\23451\end{pmatrix}$ $\Uparrow$

Код инверзног пресликавања оригинали су у другом реду, а њихове слике у првом реду што значи да се 5 пресликава у 4.