ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ

Принцип математичке индукције

<u>Теорема</u>: Ако је тврђење које у својој формулацији садржи природан број n тачно за $n=1$ и ако из претпоставке да је тачно за $n=k$ следи да је тачно и за $n=k+1$, онда је то тврђење тачно за све природне бројеве.

ЗАДАЦИ

1. Методом математичке индукције доказати да за све природне бројеве важи:

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

Решење:

Метод математичке индукције састоји се из следећег:

1) **Доказује се да тврђење важи за** $n=1$
2) **Претпоставља се да тврђење важи за** $n=k$
3) **Доказује се да тврђење важи за** $n=k+1$**.**

1) Докажимо да важи за $n=1$

$$2\cdot 1-1=1^2$$
$$2-1=1$$
$$1=1$$

У тврђењу које је дато у задатку узимамо да је $n=1$

2) Претпоставка да тврђење важи за $n=k$

$$1+3+5+...+(2k-1)=k^2 \qquad (*)$$

У тврђењу које је дато у задатку узимамо да је $n=k$ и претпостављамо да је (*) тачна

3) Доказујемо да тврђење важи за $n = k+1$

Када у тврђење које је дато у задатку заменимо $n = k+1$ добија се

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$$
$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+2-1)=(k+1)^2$$
$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$$

Потребно је доказати да ова једнакост заиста важи

На основу (*)

$$k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

$$k^2+2k+1=(k+1)^2$$
$$(k+1)^2=(k+1)^2$$

Знамо да је $(k+1)^2 = k^2+2k+1$ квадрат бинома.

2. Методом математичке индукције доказати да за све природне бројеве важи:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Решење:

1) За $n=1$

$$1=\frac{1(1+1)}{2}$$
$$1=1$$

2) Претпоставимо да важи за $n=k$

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2} \qquad (*)$$

3) Доказујемо да важи за $n=k+1$ тј. потребно је доказати да важи:

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$
$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

На основу (*) је $1+2+3+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$

$$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

3. Методом математичке индукције доказати да за све природне бројеве важи:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Решење:

1) За $n=1$ имамо

$$1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$$

$$1=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$$

$$1=1$$

2) Претпостављамо да важи за $n=k$ тј. нека је

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad (*) \qquad \text{(индуктивна претпоставка)}$$

3) Користећи индуктивну претпоставку доказујемо тачност за $n=k+1$ тј. доказујемо

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

На основу (*)

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)[2k^2+k+6k+6]}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Јер је

$$2k^2+7k+6=0$$

$$k_{1/2}=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 2\cdot 6}}{2\cdot 2}$$

$$k_{1/2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{4}$$

$$k_{1/2}=\frac{-7\pm 1}{4}$$

$$k_1=\frac{-7+1}{4}=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}$$

$$k_2=\frac{-7-1}{4}=\frac{-8}{4}=-2$$

Квадратна једначина облика $ax^2+bx+c=0$ може се представити у облику
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

где су x_1 и x_2 корени квадратне једначине.

$$2k^2+7k+6=2\left(k-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)(k-(-2))=2\left(k+\frac{3}{2}\right)(k+2)=(2k+3)(k+2)$$

4. Применом математичке индукције доказати да је

7^n-1 дељиво са 6.

Решење:

1) За $n=1$

$7^1-1=7-1=6$ дељиво са 6

2) Претпоставимо да важи за $n=k$

7^k-1 дељиво са 6 (*) (индуктивна претпоставка)

3) Докажимо да важи за $n=k+1$

$$7^{k+1}-1=7^k\cdot 7^1-1=\underbrace{6\cdot 7^k}_{\text{Дељиво са 6}}+\underbrace{7^k-1}_{\text{Дељиво са 6 на основу (*)}}$$

На основу правила степеновања
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ важи да је $7^k \cdot 7^1 = 7^{k+1}$

$6 \cdot 7^k + 7^k = 7 \cdot 7^k = 7^1 \cdot 7^k = 7^{k+1}$

5. Применом математичке индукције доказати да је

$4^n + 15n - 1$ дељиво са 3.

Решење:

1) За $n = 1$ имамо да је

$4^1 + 15 \cdot 1 - 1 = 4 + 15 - 1 = 18$ дељиво је са 3

2) Претпоставимо да важи за $n = k$

$4^k + 15k - 1$ претпоставка да је дељиво са 3 (*)

3) Докажимо да важи за $n = k + 1$ тј. докажимо да је

$4^{k+1} + 15(k+1) - 1$ дељиво са 3

Како је

$4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4^k \cdot 4^1 + 15k + 15 - 1 = 4^k + 3 \cdot 4^k + 15k + 15 - 1 =$

$4^k + 15k - 1 + 3 \cdot 4^k + 15 = 4^k + 15k - 1 + 3(4^k + 5)$

Дељиво са 3 на основу (*)

Дељиво са 3 јер сваки број помножен са 3 је и дељив са 3

$4^{k+1} = 4^k \cdot 4^1 = 4 \cdot 4^k = 1 \cdot 4^k + 3 \cdot 4^k$

На пример:

$4 \cdot 4^k = 3 \cdot 4^k + 4^k$ или

$4 \cdot 4^k = 2 \cdot 4^k + 2 \cdot 4^k$

6. Доказати да је збир кубова три узастопна природна броја дељив са 9.

Решење:

n, *n+1*, *n+2* три узастопна природна броја

Потребно је доказати да је $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ дељиво са 9.

1) За $n=1$ је

$1^3+(1+1)^3+(1+2)^3=1+8+27=36$ дељиво је са 9.

2) Претпоставимо да важи за $n=k$

$k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$ претпоставка да је дељиво са 9 (*)

3) Докажимо да је важи за $n=k+1$ тј. потребно је доказати да је

$(k+1)^3+(k+1+1)^3+(k+2+1)^3=(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$ дељиво са 9.

Имамо да је

$$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+3k^2\cdot 3+3k\cdot 3^2+3^3=$$

$$(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9k^2+27k+27=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9(k^2+3k+3)$$

Дељиво са 9 на основу претпоставке (*)

Дељиво са 9 јер било који број помножен са 9 је и дељив са 9

На основу формуле

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Добили смо да је

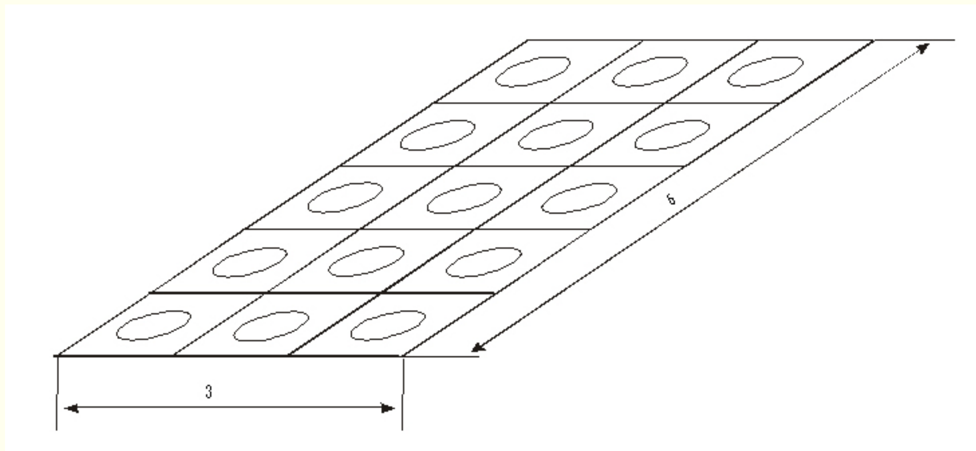
$$(k+3)^3=k^3+3k^2\cdot 3+3k\cdot 3^2+3^3$$

MNOŽENJE I DELJENJE PRIRODNIH BROJEVA

Alija Mandak

Abstract: U radu se definiše operacija množenje prirodnih brojeva pomoću skupova i aksiomatski. Operacija deljenje se definiše kao suprotna operaciji množenje i pomoću skupova. Ispituju se osnovne osobine ovih operacija u obimu koliko je potrebno da znaju nastavnici početne nastave matematike. Navode se konkretni primeri pomoću kojih se ove operacije i njihove osobine objašnjavaju u početnoj nastavi. Detaljno je objašnjeno kako se usvaja tablica množenje u drugom razredu osnovne škole.

Pojam operacije množenje uvodimo kao skraćeno sabiranje, i to na dva načina: *koristeći Dekartov proizvod dva konačna skupa i aksiomatski*. U početnoj nastavi pojam proizvoda kao skraćenog sabiranja ilustrujemo na sledećem primeru: učenici pripreme po ***15*** kuglica, a nastavnik zahteva da učenici rasporede sve kuglice u redove tako da svaki red ima po tri kuglice (***Sl.1.***). Učenici sami otkrivaju da postoji pet redova sa po tri kuglice u svakom od njih. Isto tako nije teško da učenici sami otkriju da u istoj situaciji postoje tri stupca sa po pet kuglica. Ovo zapisujemo ovako:



Slika 1.

$$\boldsymbol{3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 + 5 + 5 = 15}, \text{ ili kraće } \boldsymbol{3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15.}$$

Nastavnik objašnjava i uporedo zapisuje na tabli sledeće:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\quad 5 \quad}_{\text{prvi činilac}} \bullet \underbrace{\quad 3 \quad}_{\text{drugi činilac}}}_{\text{činioci}} = \underbrace{\quad 15 \quad}_{\text{proizvod broja 5 i 3}}}_{\text{množenje}}$$

Ako se ovako formira proizvod dva prirodna broja učenici istovremeno sami otkrivaju komutativnost množenja.

1. Definicija. Neka su $a,b \in N$ proizvoljna dva prirodna broja. Tada

$$a \cdot b = a + a + a + \ldots + a, \text{ ako je } a>1; \; a \cdot b = a, \text{ ako je } a = 1.$$

Egzistencija i jedinstvenost proizvoda sledi iz teoreme 2.2 o egzistenciji i jedinstvenosti zbira.

1'. Definicija. Proizvod dva prirodna broja $a,b \in N$ jednak je broju elemenata dekartovog proizvoda AxB dva konačna skupa A i B gde je broj elemenata skupa A jednak a, a skupa B jednak b:

$$a \cdot b = k(A \text{x} B), \text{ ako je } k(A) = a, \; k(B) = b.$$

2. Teorema (jedinstvenost proizvoda). Proizvod $a \cdot b$ dva prirodna broja a i b je jednoznačno određen prirodni broj.

Dokaz. Neka $a, b \in N$, i neka su A, A_1, B, B_1 konačni skupovi takvi da je $a=k(A)=k(A_1)$, $b=k(B)= k(B_1)$. Treba dokazati da je $k(A \text{ x } B)=k(A_1 \text{ x } B_1)$. Kako skupovi A i A_1, odnosno B i B_1 imaju jednak broj elemenata, sledi da su oni ekvivalentni pa postoje bijekcije $\varphi: A \to A_1$, $\psi: B \to B_1$. Pomoću ovih bijekcija definišemo preslikavanje $\tau: A\text{x}B \to A_1\text{x}B_1$ na sledeći način: neka $(x,y) \in A\text{x}B$, $x \in A$, $y \in B$ i neka je $\varphi(x)=x_1$, $\psi(y) = y_1$, $x_1 \in A_1$, $y_1 \in B_1$. Tada je $\tau(x,y) = (x_1,y_1)$. Dokažimo da je τ bijekcija. Neka je $(x,y) \neq (x',y')$ tada je $x \neq x'$ ili $y \neq y'$. Ako je $x \neq x'$ onda $\varphi(x) \neq \varphi(x')$ jer je φ injekcija, pa je $(\varphi(x), \psi(y)) \neq (\varphi(x'), \psi(y'))$. Ako je $y \neq y'$ onda $\psi(y) \neq \psi(y')$ jer je ψ injekcija pa je $(\varphi(x), \psi(y)) \neq (\varphi(x), \varphi(y))$. Dakle, τ je injekcija i ostaje da se dokaže da je τ surjekcija. Neka $(x_1,y_1) \in A_1\text{x}B_1$. Kako su φ i ψ surjekcije sledi da postoje $x \in A$ i $y \in B$ tako da je $\varphi(x) = x_1$, $\psi(y) = y_1$. Dakle, postoji $(x,y) \in A\text{x}B$ tako da je $\tau((x,y)) = (\varphi(x), \psi(y)) = (x_1,y_1)$ i τ je surjekcija. Pošto je $\tau: A \text{ x } B \to A_1 \text{ x } B_1$ bijekcija ovi skupovi su ekvivalentni, tj. imaju jednak broj elemenata: $k(A\text{x}B) = k(A_1\text{x}B_1)$. Ovo je i trebalo dokazati.

1". Definicija. Množenje prirodnih brojeva je preslikavanje $\boldsymbol{p}$: $N \times N \to N$ (tj. pravilo ili propis pomoću kojeg se svakom uredjenom paru $(x,y) \in N \times N$ prirodnih brojeva pridružuje jednoznačno određen prirodni broj $c = p(x,y) \in N$) sa osobinama:

P1) $(\forall a \in N),\ p(a,1) = a;$

P2) $(\forall a,b \in N),\ p(a,b+1) = p(a,b) + a.$

Umesto $p(a,b)$ piše se $a \cdot b$ tako da imamo:

P1') $(\forall a \in N),\ a \cdot 1 = a;$

P2') $(\forall a,b \in N),\ a \cdot (b+1) = a \cdot b + a.$

Tako je po ovoj definiciji $5 \cdot 3 = 5 \cdot (2+1) = 5 \cdot 2 + 5 = 5 \cdot (1+1) + 5 = (5 \cdot 1 + 5) + 5 = (5+5) + 5 = 10 + 5 = 15$. Dakle, uređeni par $(5,3)$ preslikava se u 15.

3. Teorema (egzistencija i jedinstvenost operacije množenje). Operacija množenje postoji i jedinstvena je.

Dokaz. Za proizvoljan $a \in N$ označimo sa M skup svih prirodnih brojeva $b \in N$ za koje proizvod $a \cdot b$ postoji i jedinstven je prirodni broj. Iz **P1)** sledi da proizvod $a \cdot 1 = a$ postoji i jedinstven je, pa $1 \in M$. Pretpostavimo da $k \in M$ tj. da proizvod $a \cdot k$ postoji i jednoznačno je odredjen prirodni broj. Za $b = k + 1$ je $a \cdot b = a \cdot (k+1) = a \cdot k + a$ (koristili smo **P2**). Po induktivnoj pretpostavci proizvod $a \cdot k$ postoji i jednoznačno je odredjen i iz teoreme o egzistenciji i jednoznačnosti zbira sledi da $a \cdot k + 1$ postoji i jednoznačno je odredjen. Dakle $k + 1 \in M$ i teorema je dokazana.

Zbog ove osobine, kao i za sabiranje, *za operaciju množenje kaže se da je zatvorena,* tj. *potpuno definisana* operacija u skupu N prirodnih brojeva.

4. Teorema (levi distributivni zakon množenja prema sabiranju). Za svaka tri prirodna broja *a, b,* $c \in N$ važi:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Dokaz. Dajemo tri dokaza koristeći Definicije 1, 1', 1''.

I. Po ***definiciji 1*** imamo $a \cdot b = \underbrace{(a + a + \ldots + a)}_{b-\text{puta}}$, $a \cdot c = \underbrace{(a + a + \ldots a)}_{c-\text{puta}}$

$$a \cdot b + a \cdot c = \underbrace{\mathbf{(a + a + \ldots + a) + (a + a + \ldots a)}}_{\mathbf{(b+c)-puta}} = \underbrace{(a + a + \ldots + a)}_{(b+c)-\text{puta}} = a \cdot (b + c).$$

II. Koristimo Definiciju 1'. Neka su *A, B, C* tri konačna skupa takva da je $k(A) = a$, $k(B) = b$, $k(C) = c$, $B \cap C = \varnothing$. Po definiciji zbira i proizvoda imamo

$$a \cdot (b + c) = k[A \times (B \cup C)] = k[(A \times B) \cup (A \times C)] = k(A \times B) + k(A \times C) = a \cdot b + a \cdot c.$$

III. Na kraju, koristeći Definiciju 1'' dokaz izvodimo indukcijom po c. Neka su $a,b \in N$ dva proizvoljna prirodna broja. Za $c = 1$ je $a \cdot (b + c) = a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a = a \cdot b + a \cdot 1 = a \cdot b + a \cdot c$. (koristili smo **P1** i **P2**). Dakle, teorema je tačna za $c = 1$. Pretpostavimo tačnost za $c = k$, tj. neka je $a \cdot (b + k) = a \cdot b + a \cdot k$. Dokazujemo tačnost za $b = k + 1$. Imamo

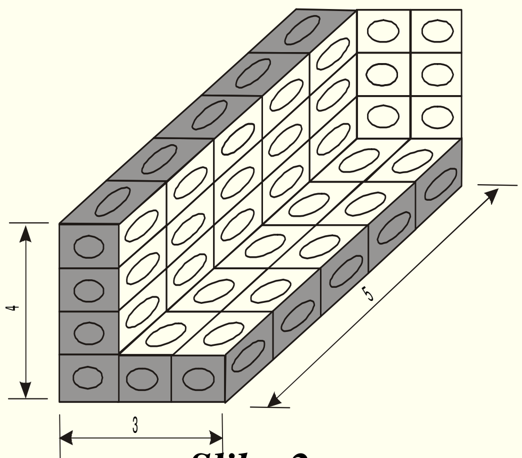
$$a \cdot (b + c) = a \cdot [b + (k + 1)] = a \cdot [(b + k) + 1)] = a \cdot (b + k) + (a \cdot b + a \cdot k) + a = a \cdot b + (a \cdot k + a) = a \cdot b + a \cdot (k + 1) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Teorema je dokazana.

5. Teorema (**asocijativnost množenja**). Za svaka tri prirodna broja $a, b, c \in N$ važi:

$$a(bc) = (ab)c.$$

Dokaz. I. Objasnili smo kako učenici formiraju pojam množenja kao skraćenog sabiranja i istovremeno samostalno otkrivaju komutativnost množenja. Kao na ***Slici 1.*** učenici naprave pet redova sa po tri kuglice. Učenici sami otkrivaju da je ukupan broj kuglica $5 \cdot 3$. Iznad ovih kuglica učenici zamisle (u sebi) još tri puta po pet redova sa po tri kuglice (***Slika 2.***). Insistrati na apstraktnom zamišljanju situacije kao na ***Slici 2.,*** a ako je to teško za učenike (što ne bi trebalo da bude), onda se može napraviti model takve situacije. Bez većih teškoća učenici otkrivaju da je ukupan broj kuglica $5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = (5 \cdot 3) \cdot 4$. Sada se zamišlja pravougaonik koji ima četiri stupca sa po tri kuglice. Na modelu postoje jedna pored druge pet takvih situacija.



Slika 2.

Ukupan broj kuglica je $3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = (3 \cdot 4) \cdot 5 = 5 \cdot (3 \cdot 4)$ (koristili smo komutativnost množenja). Dakle je $5 \cdot (3 \cdot 4) = (5 \cdot 3) \cdot 4$. Asocijativnost za proizvoljna tri prirodna broja $a, b, c \in N$ dokazuje se slično.

II. Dokazujemo teoremu koristeći Definiciju 1'. Neka su ***A, B, C*** tri konačna skupa takva da je ***k(A)=a, k(B)=b, k(C)=c.*** Skupovi ***A***x***(B***x***C)*** i ***(A***x***B)***x***C*** su ekvivalentni, tj. imaju jednak broj elemenata. Neka čitalac kao vežbu dokaže da je preslikavanje τ: ***A***x***(B***x***C)*** $\to$ ***(A***x***B)***x***C*** definisano sa $\tau[(x,(y,z)] = ((x,y),z)$ bijekcija. Dalje je $a(bc) = k[A\times(B\times C)] = k[(A\times B)\times C] = (ab)c.$

III. Koristeći definiciju 1" dokaz izvodimo indukcijom po ***c***. Neka su $a, b\in N$ dva proizvoljna prirodna broja. Za $c=1$ je $a(bc) = a(b1) = ab = (ab)1 = (ab)c.$ Dakle, teorema je tačna za $c=1$. Pretpostavimo tačnost za $c = k$, tj. neka je $a(bk) = (ab)k$. Za $c=k+1$ imamo

$$a(bc) = a[b(k + 1)] = a(bk + b) = a(bk) + ab = (ab)k + ab = (ab)(k + 1) = (ab)c$$

(koristili smo redom definiciju sabiranja i množenja i levi distributivni zakon). Teorema je dokazana.

6. Teorema (**komutativnost množenja**). Za bilo koja dva prirodna broja $a, b\in N$ važi:

$$ab = ba.$$

Dokaz. Uvodeći pojam množenja prirodnih brojeva kao skraćenog sabiranja objasnili smo kako učenici otkrivaju komutativnost množenja. Ovaj zakon se slično dokazuje i za bilo koja dva prirodna broja $a, b\in N$.

I. Dokazujemo teoremu koristeći Definiciju 1'. Neka su ***A*** i ***B*** dva konačna skupa takva da je ***k(A)=a, k(B)=b***. Dokažimo da su skupovi ***A***x***B*** i ***B***x***A*** ekvivalentni, tj da imaju jednak broj elemenata. Preslikavanje τ: ***A***x***B***$\to$***B***x***A*** definisano sa $\tau((x,y)) = (y,x)$ je bijekcija (neka ovo čitalac dokaže sam kao vežbu). Sada imamo $ab = k(A\times B) = k(B\times A) = ba$.

II. Koristeći Definiciju 1" dokaz izvodimo indukcijom po ***b***. Neka je $a\in N$ proizvoljan prirodan broj. Za $b = 1$ je $ab = a1 = a = 1a = ba$ i teorema je tačna. Pretpostavimo tačnost za $b = k$, tj neka je $ak = ka$. Za $b = k + 1$ imamo $ab = a(k + 1) = ak + a = ka + a = (k + 1)a = ba$. Teorema je dokazana.

Iz levog zakona distributivnosti množenja prema sabiranju i komutativnosti množenja sledi desni zakon distributivnosti množenja prema sabiranju koji glasi:

Za svaka tri prirodna broja $\boldsymbol{a, b, c \in N}$ *važi* $\boldsymbol{(b + c)a = ba + ca}$.

Iz definicije množenja sledi da je broj $\boldsymbol{1}$ neutral za operaciju množenje pošto važi $\boldsymbol{1a=a1=a}$ $(\forall \boldsymbol{a \in N})$. Operacija množenje je zatvorena u skupu $\boldsymbol{N}$ svih prirodnih brojeva i važe zakoni komutativnosti i asocijacijativnosti. Ovim razmatranjem dokazana je sledeća teorema.

7. Teorema. Struktura $(\boldsymbol{N},\cdot)$ skupa $\boldsymbol{N}$ svih prirodnih brojeva sa operacijom množenje je komutativan i asocijativan grupoid sa jedinicom, tj komutativna polugrupa sa jedinicom.

Za $(\boldsymbol{N},\cdot)$ se kaže da je **multiplikativni grupoid,** odnosno **multiplikativna polugrupa** skupa prirodnih brojeva

8. Teorema (zakon skraćivanja za množenje ili regularnost množenja). Za svaka tri prirodna broja $\boldsymbol{a, b, c} \in N$ važi:

$\boldsymbol{(ac = bc) \Rightarrow a = b}$ (desni zakon skra}ivanja za množenje);

$\boldsymbol{(ca = cb) \Rightarrow a = b}$ (levi zakon skra}ivanja za množenje).

Dokaz. Indukcijom po $\boldsymbol{a}$ dokazujemo samo levi zakon, jer se desni dokazuje slično. Neka su $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$ dva prirodna broja. Za $\boldsymbol{a = 1}$ je $\boldsymbol{c = c \cdot 1 = cb}$. Ako je $\boldsymbol{b \neq 1}$ onda $\boldsymbol{b = r + 1}$ za $\boldsymbol{r \in N}$. Otuda $\boldsymbol{c=c(r+1)=cr+c}$ što nije moguće. Dakle $\boldsymbol{c \cdot 1 = cb \Rightarrow b = 1}$ i teorema je tačna za $\boldsymbol{a = 1}$. Pretpostavimo tačnost za $\boldsymbol{a = n}$, tj. da $\boldsymbol{(cn = cb) \Rightarrow n = b}$. Za $\boldsymbol{a = n + 1}$ je $\boldsymbol{c(n + 1) = cb}$. Ako je $\boldsymbol{b = 1}$ onda $\boldsymbol{n + 1 = 1}$ što nije moguće. Dakle $\boldsymbol{b \neq 1}$, tj. $\boldsymbol{b = r + 1}$ za $\boldsymbol{r \in N}$. Sada je $\boldsymbol{c(n + 1) = c(r + 1) \Leftrightarrow cn + c = cr + c}$. Iz zakona skraćivanja za sabiranje i induktivne pretpostavke sledi $\boldsymbol{n = r}$. Dalje je $\boldsymbol{n + 1 = r + 1}$, tj. $\boldsymbol{a = b}$. Time je teorema dokazana.

Na primeru množenje broja ***7*** (prirodnim brojevima ***1, 2, ···, 10***) objasnimo kako se formira tablica množenja u drugom razredu osnovne škole. Na osnovu pojma operacije proizvod dva broja kao skraćenog sabiranja učenik može sam da računa:

$$7 \cdot 1 = 7$$
$$7 \cdot 2 = 7 + 7 = 14$$
$$7 \cdot 3 = (7 + 7) + 7 = 14 + 7 = 21$$
$$7 \cdot 4 = 14 + 14 = 28$$
$$7 \cdot 5 = 28 + 7 = 35$$
$$7 \cdot 6 = 14 + 14 + 14 = 42$$
$$7 \cdot 7 = 42 + 7 = 49$$
$$7 \cdot 8 = 70 - 14 = 56$$
$$7 \cdot 9 = 70 - 7 = 63$$
$$7 \cdot 10 = 70.$$

Korisno je prvo pisati ovim redosledom. Posle toga učenik može računati takođe ovim redosledom ali usmeno (u sebi) bez zapisivanja. Treća faza je zapisivanje preko reda, bez preciziranog redosleda, tj. slučajnim izborom.

$7 \cdot 6 = 42$, jer je $7 \cdot 5 + 7 = 35 + 7 = 42$ ili

$7 \cdot 6 = 42$, jer je $7 \cdot 3 + 7 \cdot 3 = 21 + 21 = 42$

$7 \cdot 8 = 56$, jer je $7 \cdot 4 + 7 \cdot 4 = 28 + 28 = 56$ ili

$7 \cdot 8 = 56$, jer je $7 \cdot 10 - 7 \cdot 2 = 70 - 14 = 56$ i slično.

Treću fazu ponoviti bez zapisivanja, usmenim putem.

Ne insistirati na mehaničkom učenju tablice množenja napamet. Dobro bi bilo da učenik izračunava svaki slučaj na razne načine kao što je gore navedeno, a nastavnik će se uveriti da to ne može potrajati duže od dve-tri nedelje. Ovakav pristup će eliminisati nužnost pamćenja tablice i omogućiti kvalitetno učenje. Iz tablice učenik uočava komutativnost proizvoda i zato treba postaviti sledeće zadatke:

*Napiši na sve moguće načine broj **12** kao proizvod dva prirodna broja, i slično broj **36, 56**.*

$$12 = 6 \cdot 2 = 2 \cdot 6, \qquad 12 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 4, \qquad 12 = 12 \cdot 1 = 1 \cdot 12.$$

Da je $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, gde je a ma koji učeniku poznat broj, učenik vidi neposredno tako što zamišlja jedan red sa a kuglica ili jedan stubac sa a kuglica.

Da bi još na početku učenici shvatili deljenje kao (delimičnu) operaciju suprotnu množenju nastavnik učenicima postavlja zadatak sledećeg tipa:

*Jedan činilac je **3** a proizvod **15**. Nađimo drugi činilac. Učenici sami otkrivaju da je nepoznati drugi činilac **5***. Ovo zapisujemo ovako

$15 : 3 = 5$. Dakle, $15 : 3 = 5$ isto je što i $3 \cdot 5 = 15$. Nastavnik objašnjava i zapisuje na tabli sledeće:

$$\underbrace{\underbrace{15}_{\text{deljenik}} : \underbrace{3}_{\text{delilac}} = \underbrace{5}_{\text{količnik brojeva 15 i 3}}}_{\text{deljenje}}$$

9. Definicija. Količnik $a : b$ dva prirodna broja $a, b \in N$ je broj $c \in N$ (ako postoji) takav da je $a = b \cdot c$

$$a : b = c \Leftrightarrow a = b \cdot c$$

Neka je $a \in N$; posmatrajmo konačan skup A, takav da je $k(A) = a$. Ako se skup A može predstaviti kao unija b konačnih skupova $A_1, A_2, \ldots, A_b$ koji imaju jednak broj elemenata c i koji su po parovima disjunktni, onda se broj elemenata svakog od ovih skupova zove količnik brojeva a i b.

Operacija kojom smo odredili količnik zove se **deljenje**. Piše se $a : b = c$.

Ako se umesto skupa A posmatra drugi skup A' koji je ekvivalentan sa A onda se i skup A' može razbiti na b skupova, tj. važi sledeća teorema.

10. Teorema (dobra definisanost deljenja). Ako je $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_b$ $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i,j = 1, 2, \ldots, b$, $k(Ai) = c$, onda za bilo koji skup $A' \sim A$ postoje skupovi $A1', A2', \ldots, Ab'$, tako da je $A' = A_1' \cup A_2' \cup \ldots \cup A_b'$, $A_i' \cap A_j' = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, b$, $k(A_i') = c$.

Dokaz. Iz $A \sim A'$ sledi da postoji bijekcija $\varphi: A \to A'$ skupa A na skup A'. Skupovi $A_i' = \varphi(A_i)$ ispunjavaju uslove teoreme. Pošto je φ bijekcija sledi $k(A_i) = k(A_i') = c$. Dokažimo da su skupovi A_i', $i = 1, 2, \ldots, b$, po parovima disjunktni. Ako $y \in A_i' \cap A_j'$ onda $y \in A_i'$ i $y \in A_j'$ pa postoji $x \in A_i \cap A_j$ takav da je $y = \varphi(x)$ što nije moguće. Očigledno je $A' = A1' \cup A2' \cup \ldots \cup Ab'$ i teorema je dokazana.

Očigledno je da za bilo koja dva prirodna broja $a, b \in N$ ne mora da postoji razbijanje skupa A koje zadovoljava uslove definicije količnika. Na primer, skup A koji ima 7 elemenata ne može se predstaviti kao unija 3 skupa koji su po parovima disjunktni i imaju jednak broj elemenata. Zbog ovoga (isto kao za operaciju oduzimanje) kažemo da je deljenje delimično definisana operacija u skupu N svih prirodnih brojeva. Kaže se takole da deljenje nije zatvorena, tj. potpuno definisana operacija u skupu N.

Bez dokaza navodimo sledeću teoremu.

11. Teorema. Za operaciju deljenje važi sledeća osobina:

*ako su prirodni brojevi **a** i **b** deljivi prirodnim brojem **c**, onda je i zbir **a + b** deljiv sa **c** i važi*

$(a + b) : c = a : c + b : c$ *(levi distributivni zakon sabiranja prema deljenju).*

Operacija deljenje u skupu N prirodnih brojeva nije komutativna, tj. $a : b \neq b : a$. Na primer za $a = 10$ i $b = 5$ količnik $10 : 5 = 2$ postoji, a količnik $5 : 10$ ne postoji.
Operacija deljenje u skupu N prirodnih brojeva nije asocijativna tj. $(a : b):c \neq a:(b : c)$. Na primer za $a = 20$, $b = 2$ i $c = 5$ imamo
$(a : b) : c = (20 : 2) : 5 = 10 : 5 = 2$, $a : (b : c) = 20 : (10 : 5) = 20 : 2 = 10$ što dokazuje ovo tvrđenje.

Kako je po **P1**) $a \cdot 1 = a$ iz Definicije 9 sledi da je $a : 1 = a$ $(\forall a \in N)$.
Ako $a \mid b$ i $b \mid a$, onda je $a = b$. Zaista, iz $a \mid b$ i $b \mid a \Rightarrow a = b \cdot c$ i $c = d \cdot a \Rightarrow a = a \cdot (c \cdot d) \Rightarrow c \cdot d = 1$. Ne može biti $c > 1$ jer je tada $c \cdot d > 1$. Takođe, ne može biti $d > 1$. Sledi $c = d = 1 \Rightarrow a = b$.
Za proizvoljne $a, b \in N$ ili postoji $c \in N$ takav da je $a = b \cdot c$ ili postoje c i $r \in N$, $r < b$, takvi da je $a = b \cdot c + r$. Broj c je **delimični količnik**, a r se zove **ostatak** pri deljenju a sa b.

LITERATURA

1. V. Devide: *Zadaci iz apstraktne algebre,* Matematički problemi i ekspozicije 1, Naučna knjiga, Beograd, 1968.
2. J. Dragičević: *Metodika nastave matematike sa užestručnim prilozima za praksu,* Bijeljina, 2000.
3. Lj. Kočinac, A. Mandak, *Algebra II,* Univerzitet u Prištini, Priština, 1996.
4. S. Kurepa: *Uvod u matematiku, skupovi - structure - brojevi,* Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.
5. S. Kurepa, *Skupovi što su i kakva im je uloga*, Školska knjiga, Zagreb, 1960.
6. A. G. Kuroš, *Lekcii po obše algebrы*, Moskva, 1952.
7. R. Krulj, S. Kačapor, R. Kulić*: Pedagogija*, Svet knjige, Beograd, 2002.
8. M. Marjanović: *Metodika matematike, prvi deo*,Učiteljski fakultet, Beograd, 1996.
9. M. Marjanović: *Metodika matematike, drugi deo*,Učiteljski fakultet, Beograd, 1996.
10. M. Marjanović, M Latković, B. Nikodijević: *Matematika za 1. razred osnovne škole,* Zavod za udžbenike i nastavna sredstva Beograd, 2001.
11. T. Malinović: *Osnovi nastave matematike*, Učiteljski Fakultet, Vranje, 1988.
12. A. E. Merzon, A. S. Dobrotvorski, A. L. Čekin: *Posobie po matematike dlя studentob fakulьtetov naćalьnыh klassov,* Moskva-Voronež, 1998.
13. S. Milić: *Elementi matematičke logike i teorije skupova,* Novi Sad, 1981.
14. M. Nikolić: *Uvodne teme u metodiku matematičkog obrazovanja*, Mlado pokolenje, Beograd, 1967.
15. J. Pinter, V. Sotirović, N. Petrović, D. Lipovac: *Opšta metodika nastave matematike,* Učiteljski fakultet, Sombor, 1996.
16. S. Prvanović: *Metodika savremenog matematičkog obrazovanja*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva Srbije, Beograd, 1970.
17. S. Prvanović: *Metodika nastave matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva Srbije, Beograd, 1974.
18. M. Prešić, S. Prešić: *Uvod u matematičku logiku,* Matematički institut, Beograd, 1979.
19. S. Prešić: *Savremeni pristup nastavi matematike,* Nastava i vaspitanje, 1-2, Beograd, 1976.
20. K. Špijunović: *Metodika početne nastave matematike, - Bibliografija -* , Učiteljski fakultet Užice, 2003.