IZGRAĐIVANJE POJMOVA ZBIRA I RAZLIKE DVA BROJA

Abstrakt: U radu se definiše pojam zbir dva prirodna broja pomoću teorije skupova i aksiomatski. Pojam ralika dva prirodna broja se definiše kao suprotna operaciji sabiranje i pomoću skupova. Ispituju se osnovne osobine ovih operacija u onoj meri koliko je potrebno da znaju nastavnici početne nastave matematike. Navode se konkretni primeri pomoću kojih se ove operacije i njihove osobine objašnjavaju u početnoj nastavi. Iako su Nastavnim programom predviđene "metodičke stepenice" do ***10***, do ***20***, do ***100***, itd. u radu se nećemo ograničavati u skupu prvih ***10***, prvih ***20***, itd. brojeva. Mislimo da se navedeni pojmovi mogu uspešno izgrađivati bez ovih ograničenja.

Ključne reči: zbir, razlika, prvi sabirak, drugi sabirak, umanjenik, umanjilac.

1. Uvod

Nastava matematike u nižim razredima osnovne škole većim delom je bitno vezana za operacije u skupu prirodnih brojeva. Primarni ciljevi matematičkog obrazovanja u Školskom programu za prvi i drugi razred obaveznog obrazovanja su:

- Razvijanje osnovnih znanja o količini i broju.
- Izgradnja bloka brojeva do 100 sa sve četiri računske operacije
- Iz ovih ciljeva slede ovi ishodi:
- Na kraju prvog i drugog razreda učenik će:
- Sabirati i oduzimati: u skupu celih brojeva od 0 do 20, višestruke desetice do 100, dvocifreni i jednocifreni broj bez prelaska desetice do 100.
- Razumeti i rešavati jednostavne i kratke tekstualne probleme koji se svode na sabiranje i oduzimanje.
- Koristiti znake sabiranja i oduzimanja, znak jednakosti, kao i odgovarajuće termine.
- Sabirati i oduzimati brojeve temeljenjem na osnovna pravila aritmetike (zamena mesta sabiraka, združivanje sabiraka, oduzimanje zbira od broja).

Pojmove **zbir** i **razlika** dva broja izgrađujemo koristeći teoriju skupova (što je prikladno za početnu nastavu matematike) i istovremeno koristeći ***Peanove aksiome***[1]. Naravno, aksiomatsko zasnivanje u početnoj nastavi nije prikladno ali se to ovde izla`e jer mislimo da bi svaki nastavnik početne nastave matematike trebalo ovo da poznaje. Tako će svaka definicija imati dve formulacije i svaka teorema dva različita dokaza. Pojmovi koji su definisani i objašnjeni korišćenjem Peanove aksiomatike namenjeni su (kao uputstva) nastavnicima matematike. Isto se odnosi i za Teoreme i njihove dokaze. Jer, samo dobar poznavalac matematike kao nauke mo`e biti uspešan rukovodilac (instructor) u usvajanju matematičkih znanja.

[1] Italijanski matematičar **Peano** (1858 – 1932) objavio je te aksiome u čuvenom delu *Sul concetto dei numeri* (1891. godine).

2. Izgrađivanje pojma zbir dva prirodna broja.

Učenici znaju pojmove početnih prirodnih brojeva, sastavljanje skupova i osnovne operacije sa skupovima. Posmatramo sledeću situaciju.

Dve devojčice znaju da određuju broj elemenata jednog skupa brojanjem njegovih elemenata ali ne znaju da sabiraju. Pretpostavimo da jedna ima ***3*** a druga ***6*** različitih sličica. One su odlučile da odrede koliko sličica imaju zajedno. Kako nisu znale da sabiraju samostalno su “otkrile” da sjedine sličice i izbroje ih. Ako se skup sličica prve devojčice označi sa ***A***, druge sa ***B***, onda je jasno da su brojanjem elemenata unije dva skupa ***A*** i ***B*** devojčice odredile koliko sličica imaju zajedno.

Ovo razmatranje daje ideju da se pojamovi zbir dva prirodna broja i operacije sabiranje prirodnih brojeva u prvom razredu izgrađuju ovako:

Učenici od svog didaktičkog materijala sastave skup **A** koji ima npr. 3 elementa i skup ***B*** koji ima npr. ***6*** elemenata. Skupovi ***A*** i ***B*** su disjunktni. Sastavi se skup $\boldsymbol{C = A \cup B}$. Učenici sami otkrivaju (računanjem ili brojanjem) da skup ***C*** ima ***9*** elemenata. Dakle, broj elemenata unije **devet.** Ovo zapisujem ovako:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{3}_{\text{prvi sabirak}} + \underbrace{6}_{\text{drugi sabirak}}}_{\text{sabirci}} = \underbrace{9}_{\text{zbir brojeva 3 i 6}}}_{\text{sabiranje}}$$

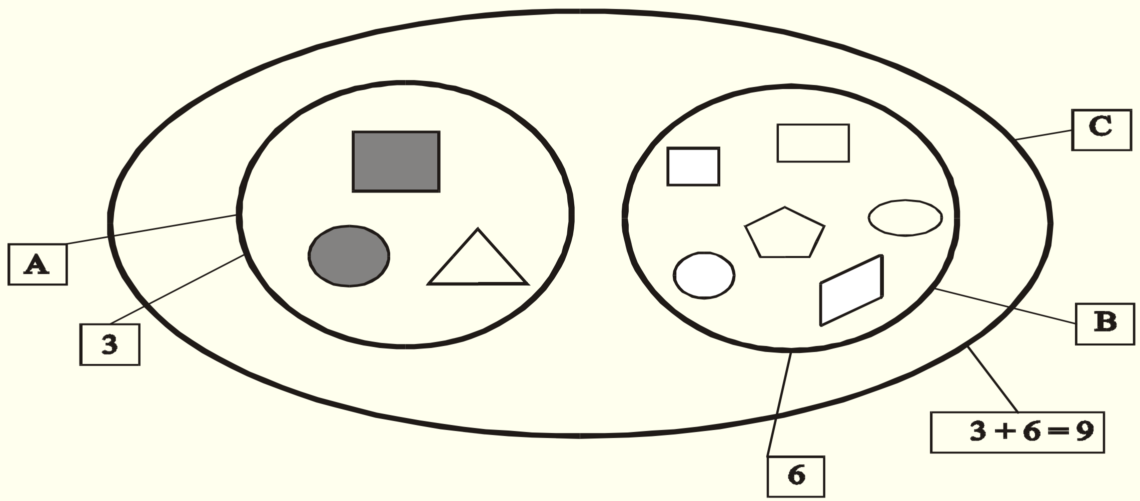
To čitamo (Nastavnik čita lagano pokazujući ono što govori):

Tri plus šest jednako devet.

Ne sme se čitati:
“Tri i šest čine devet.”
“Kad na tri dodam šest dobijem devet.”

Jer, matematika operiše sa apstraktnim pojmovima i kao takve ih učenici trebaju usvajati. Matematička operacija sabiranje je logička a ne fizička operacija, i kao takva se ne vrši u prostoru i vremenu. Brojevi kao matematički pojmovi se ne mogu dodavati i oduzimati fizički.

Nastavnik zahteva od učenike da na crtežu (***Slika 1.***) stave potrebne etikete. Te etikete su ranije pripremljene, jedan učenik ih nalazi i stavlja. Tako se dobija:



Slika 1.

Uvode se termini prvi sabirak, drugi sabirak, sabirci, izračunat zbir i operacija sabiranje. Razumljivo ne definicijama, jer bi to za učenike bilo teško, nego prosto:

Broj tri se naziva **prvi sabirak**; Broj šest se naziva **drugi sabirak**; Broj devet se naziva **zbir** brojeva tri i šest; Operacija kojom smo izračunali zbir zove se **sabiranje**.

1. Definicija. Zbir dva prirodna broja $\boldsymbol{a}$ i b je broj elemenata unije $\boldsymbol{A \cup B}$ dva konačna disjunktna skupa $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, gde je broj elemenata skupa $\boldsymbol{A}$ jednak $\boldsymbol{a}$, a broj elemenata skupa $\boldsymbol{B}$ jednak b:

$$a + b = k(A \cup B),\ a = k(A),\ b = k(B),\ A \cap B = \emptyset.$$

2. Teorema (egzistencija i jedinstvenost zbira). Za bilo koje $\boldsymbol{a,b \in N}$ zbir $\boldsymbol{a+b}$ postoji i jednoznačno je odredjen prirodni broj.

Dokaz. Dokazujemo egzistenciju. Neka su $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ proizvoljna dva prirodna broja. Postoje konačni skupovi $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ tako da je broj elemenata skupa $\boldsymbol{A}$ jednak $\boldsymbol{a}$, a skupa $\boldsymbol{B}$ jednak $\boldsymbol{b}$. Unija $\boldsymbol{A \cup B}$ ova dva skupa je takodje konačan skup i po definiciji zbira broj elemenata skupa $\boldsymbol{A \cup B}$ jednak je zbiru $\boldsymbol{a + b}$. Ostaje da se dokaže jednoznačnost zbira. Neka je $\boldsymbol{k(A) = k(A_1) = a,\ k(B) = k(B_1) = b,\ A \cap B = \emptyset,\ A_1 \cap B_1 = \emptyset}$. Kako skupovi $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{A_1}$ odnosno $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{B_1}$ imaju, respektivno, jednak broj elemenata to su oni ekvivalentni. Dakle, postoje bijekcije $\boldsymbol{\varphi: A \to A_1}$ i $\boldsymbol{\psi: B \to B_1}$. Koristeći ove dve bijekcije definišemo preslikavanje $\boldsymbol{\tau: A \cup B \to A_1 \cup B_1}$ na sledeći način:

$$\tau(x)=\varphi(x) \text{ ako } x \in A,\quad \tau(x)=\psi(x) \text{ ako } x \in B.$$

Preslikavanje $\boldsymbol{\tau}$ je bijekcija. Zaista, iz $\boldsymbol{x \in A_1 U\, B_1}$ sledi $\boldsymbol{x \in A_1}$ ili $\boldsymbol{x \in B_1}$. Ako $\boldsymbol{x \in A_1}$ onda $\boldsymbol{\varphi}$ je surjekcija povlači da postoji $\boldsymbol{a \in A}$ tako da je $\boldsymbol{\varphi(a)=\tau(a)=x}$. Ako $\boldsymbol{x \in B_1}$ onda $\boldsymbol{\psi}$ je surjekcija povlaći da postoji $\boldsymbol{b \in B}$ tako da je $\boldsymbol{\psi(b)=\tau(b)=x}$. Otuda, $\boldsymbol{\tau}$ je surjekcija. Injektivnost preslikavanja $\boldsymbol{\tau}$ sledi iz injektivnosti preslikavanja $\boldsymbol{\varphi}$ i $\boldsymbol{\psi}$ i uslova $\boldsymbol{A_1 \cap B_1 = \emptyset}$. Dakle, skupovi $\boldsymbol{A \cup B}$ i $\boldsymbol{A_1 \cup B_1}$ su ekvivalentni pa imaju jednak broj elemenata, tj. $\boldsymbol{k(A \cup B) = k(A_1 \cup B_1) = a + b}$. Time je teorema dokazana.

1'. Definicija. Sabiranje prirodnih brojeva je preslikavanje $\boldsymbol{\tau: N x N \rightarrow N}$ (tj. pravilo ili dogovor pomoću kojeg se svakom uređenom paru $\boldsymbol{(a,b) \in NxN}$ prirodnih brojeva pridružuje jedinstven prirodni broj $\boldsymbol{c = \tau(a,b)}$ sa sledećim osobinama:

S1) $\boldsymbol{(\forall a \in N), \ \tau(a,1) = a';}$

S2) $\boldsymbol{(\forall a,b \in N), \ \tau(a,b') = (\tau(a,b))'.}$

Umesto $\boldsymbol{\tau(a,b)}$ piše se $\boldsymbol{a + b}$ pa imamo:

S1') $\boldsymbol{(\forall a \in N), \ a + 1 = a';}$

S2') $\boldsymbol{(\forall a,b \in N), \ a + (b + 1) = (a + b) + 1.}$

Tako npr. operacijom sabiranje uredjen par $\boldsymbol{(2,3) \in NxN}$ preslikava se u $\boldsymbol{\tau(2,3) = 2 + 3 = 2 + 2' = (2 + 2)' = (2 + 1')' = (2 + 1)')' = ((2')')' = (3')' = 4' = 5.}$

2'. Teorema (egzistencija i jedinstvenost operacije sabiranje). Operacija sabiranje postoji i jedinstvena je.

Dokaz. Za proizvoljan $\boldsymbol{a \in N}$ neka je M skup svih $\boldsymbol{b \in N}$ za koje $\boldsymbol{a+b}$ postoji i jedinstven je prirodni broj. Za $\boldsymbol{b = 1, \ a + b = a + 1 = a'}$ postoji i jedinstven je po **S1)** što znači da $\boldsymbol{1 \in M}$. Pretpostavimo da $\boldsymbol{k \in M}$ tj. da $\boldsymbol{a + k}$ postoji i da je jedinstven. Za $\boldsymbol{b = k + 1}$ imamo $\boldsymbol{a + b = a + (k + 1) = (a + k) + 1}$. Po induktivnoj pretpostavci postoji i jedinstven je $\boldsymbol{a + k}$ i po **S2)** postoji i jedinstven je $\boldsymbol{a + b = (a + k) + 1}$ što znači da $\boldsymbol{k + 1 \in M}$. Po Aksiomi indukcije je $\boldsymbol{M = N}$ i teorema je dokazana.

Zbog ove osobine kaže se da je operacija sabiranje potpuno definisana, odnosno, zatvorena u skupu $\boldsymbol{N}$.

3. Teorema (asocijativnost sabiranja). Za svaka tri prirodna broja $a,b,c\in N$ važi:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Dokaz. Prvi dokaz izvodimo pomoću skupova koristeći definiciju **2.1**, a drugi metodom matematičke indukcije koristeći definiciju **2.1**'.

I način: Neka $k(A) = a, k(B) = b, k(C) = c, A\cap B = B\cap C = A\cap C = \emptyset.$ Koristimo da je $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$, $A\cap(B\cup C) = \emptyset$, $(A\cup B)\cap C = \emptyset$ (jer su skupovi A, B, C po parovima disjunktni) i imamo $a + (b + c) = k(A) + k(B\cap C) = k[A\cap(B\cap C)] = k[(A\cap B)\cap C)] = (a + b) + c$. Prvi dokaz je završen.

II način: Drugi dokaz se izvodi indukcijom po c. Neka su $a,b\in N$ dva proizvoljna prirodna broja i $M = \{c\in N/ (a + b) + c = a + (b + c)\}$. Za $c = 1$, po **S1'**, je $a + (b + c) = a + (b + 1) = (a + b) + 1 = (a + b) + c$ što znači da $1\in M$. Pretpostavimo da $k\in M$ tj. da je $a + (b + k) = (a + b) + k$. Za $c = k + 1$ *je* $a + (b + c) = a + [b + (k + 1)] = a + [(b + k) + 1] = [a + (b + k)] + 1 = [(a + b) + k] + 1 = (a + b) + (k + 1) = (a + b) + c$, što znači da $k + 1\in M$. Po $A5$ je $M = N$ i teorema je dokazana.

Za dokaz komutativnosti sabiranja potrebna je sledeća lema:

4. Lema. Za svaki prirodni broj $a\in N$ važi: $a + 1 = 1 + a$.

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po **a**. Za $a = 1$ je $a + 1 = 1 + 1 = 1 + a$ i lema je tačna. Pretpostavimo tačnost za $a = k$ tj. neka je $k + 1 = 1 + k$. Za $a = k + 1$ imamo $a + 1 = (k + 1) + 1 = (1 + k) + 1 = 1 + (k + 1) = 1 + a$. Koristili smo induktivnu pretpostavku i asocijativnost sabiranja. Lema je dokazana.

5. Teorema (komutativnost sabiranja).

Za bilo koja dva prirodna broja $a, b \in N$ važi:

$$a + b = b + a.$$

Dokaz. Kao i u dokazu teoreme o asocijativnosti sabiranja i ovde dajemo dva dokaza.

I način: Prvo dokazujemo pomoću skupova. Neka su A i B dva konačna skupa i neka je $k(A) = a$, $k(B) = b$, $A \cap B = \emptyset$. Koristimo komutativnost unije $A \cup B = B \cup A$ i imamo $a + b = k(A \cup B) = k(B \cup A) = b + a$. Time je završen prvi dokaz.

II način: Drugi dokaz se izvodi indukcijom po b. Neka je a proizvoljan prirodan broj i $M = \{c \in N / a + b = b + a\}$. Za $b = 1$ po prethodnoj lemi je $a+b = a+1 = 1+a = b+a$ što znači da $1 \in M$. Pretpostavimo da $k \in M$ tj. neka važi $a + k = k + a$. Za $b = k+1$ imamo $a + b = a + (k + 1) = (a + k) + 1 = (k + a) + 1 = k + (a + 1) = k + (1 + a) = (k + 1) + a = b + a$, što znači da $k+1 \in M$. Po $A5$ je $M = N$ i teorema je dokazana.

Kasnije, kada se uvede pojam operacije oduzimanje, objasnićemo kako učenici samostalno otkrivaju zakon komutativnosti za sabiranje.

6. Teorema (zakon skraćivanja za sabiranje ili **regularnost sabiranja**). Za svaka tri prirodna broja $a,b,c \in N$ važi:

$(a+c = b+c) \Rightarrow (a = b)$ (desni zakon skraćivanja za sabiranje);
$(c+a = c+b) \Rightarrow (a = b)$ (levi zakon skraćivanja za sabiranje).

Dokaz. Dokazujemo samo levi zakon jer se desni dokazuje slično. Neka su $c,b \in N$ dva proizvoljna prirodna broja. Dokaz ivodimo indukcijom po **a**. Prvo dokazujemo tačnost za $a = 1$ tj. da $(c + 1 = c + b) \Rightarrow b = 1$. Pretpostavka $b \neq 1$ daje $b = r + 1, r \in N$ i imamo $c + 1 = c + b = (c + 1) + r$ što nije moguće. Dakle teorema je tačna za $a = 1.$ Pretpostavimo tačnost za $a = n$ tj. da $(c + n = c + b) \Rightarrow n = b$. Za $a = n + 1$ je $[c + (n + 1) = c + b]$. Pretpostavka $b = 1$ dovodi do $(c + 1) + n = c + 1$ što nije moguće. Dakle $b \neq 1$ i otuda $b = r+1$, $r \in N$. Sada je $[c + (n + 1) = c + (r + 1)]$ tj. $[(c + n) + 1 = (c + r) + 1]$. Iz treće *Peanove* aksiome i induktivne pretpostavke sledi $c + n = c + r$ odnosno $n = r.$ Dalje je $n + 1 = r + 1$ tj. $a = b$. Teorema je dokazana.

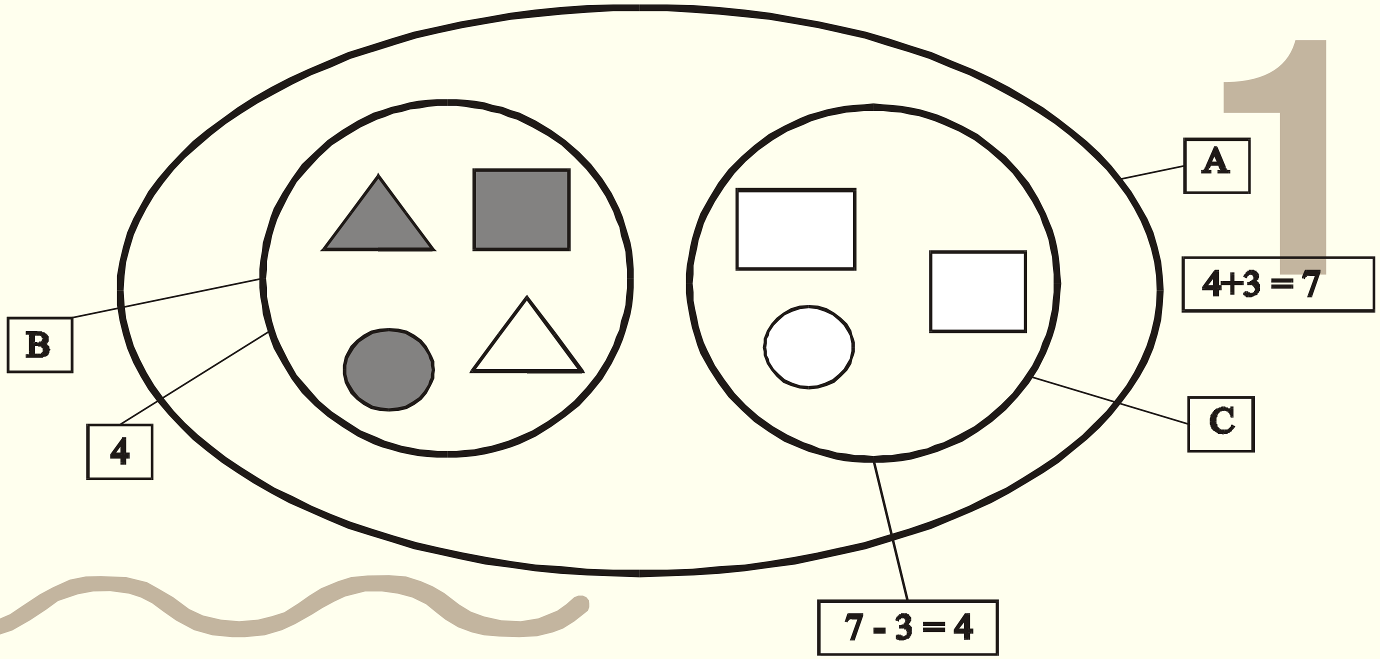
Iz teoreme **2.2**. i **2.2’** sledi da je operacija sabiranje zatvorena, tj potpuno definisana u skupu N svih prirodnih brojeva. Iz teoreme **2.3.** i **2.5.** sledi da je sabiranje ascijativna i komutativna operacija. Ovim razmatranjem dokazali smo sledeću teoremu:

7. Teorema. Struktura $(N, +)$ skupa N prirodnih brojeva sa operacijom sabiranje je komutativan i asocijativan grupoid bez neutrala, tj. komutativna polugrupa bez neutrala.

Za $(N,+)$ se kaže da je **aditivni grupoid**, odnosno, **aditivna polugrupa** skupa prirodnih brojeva.

3. Izgrađivanje pojma razlika dva broja

Za uvođenje pojma razlike dva prirodna broja pođimo od sledećeg primera: Učenici od svog didaktičkog materijala sastave **skup** A od sedam elemenata i skup $B \subseteq A$ od četiri elementa. Nastavnik zna da je skup C koji sadrži elemente skupa A koji nisu u B dopuna skupa B tj. jednak $A \setminus B$. Učenici sami otkrivaju (računanjem ili brojanjem) da skup C ima tri elementa. Ovo zapisujemo ovako $7 - 4 = 3$**.** Dakle, $7 - 4 = 3$. Uoči se da je ovo isto što i $4 + 3 = 7$. Na crtežu sa ***Slike 2***. zalepe se odgovarajuće etikete



Slika 2.

Da bi učenici još na početku shvatili oduzimanje kao operaciju suprotnu sabiranju nastavnik postavlja, na primer, ovakav zadatak:

Jedan sabirak je ***4*** a zbir je ***7***. Izračunajmo koji je drugi sabirak. Učenici otkrivaju da drugi sabirak mora biti ***3***. Još jednom učenici zaključuju da je ***7 - 4 = 3*** isto što i ***4 + 3 = 7.*** Nastavnik objašnjava i zapisuje na tabli sledeće:

$$\underbrace{\underbrace{7}_{\text{umanjenik}} - \underbrace{4}_{\text{umanjilac}} = \underbrace{3}_{\text{razlika brojeva 4 i 3}}}_{\text{oduzimanje}}$$

To čitamo (Nastavnik čita lagano pokazujući ono što govori):

Sedam minus četiri jednako tri.

Iz istih razloga kao za operaciju sabiranje ne sme se čitati:

“Kad od sedam oduzmem četiri dobijam tri”

ili izmišljati razne priče kao na primer:

Milan je imao sedam klikera. Svome drugu je pozajmio četiri. Koliko klikera Milan ima sada.

Uvode se termini **umanjenik, umanjilac, izračunata razlika i operacija oduzimanje**. Razumljivo ne definicijama, jer bi to za učenike bilo teško, nego prosto:

Broj sedam se naziva **umanjenik**; Broj četiri se naziva **umanjilac**; Broj ***3*** se naziva **razlika** brojeva sedam i četiri; Operacija kojom smo izračunali razliku zove se **oduzimanje**.

Kad god učenik računa razliku ***a - b*** traži broj c takav da je ***b + c = a.***

8. Definicija. Razlika $a - b$ dva prirodna broja $a, b \in N$ takvih da je $a>b$ je broj c takav da je $c + b = a$

$$a - b = c \Leftrightarrow c + b = a.$$

8'. Definicija. Razlika $a - b$ dva prirodna broja $a, b \in N$ takva da je $a>b$ je broj elemenata skupa $A \setminus B$, gde je $k(A) = a, k(B) = b$ i $B \in A$.

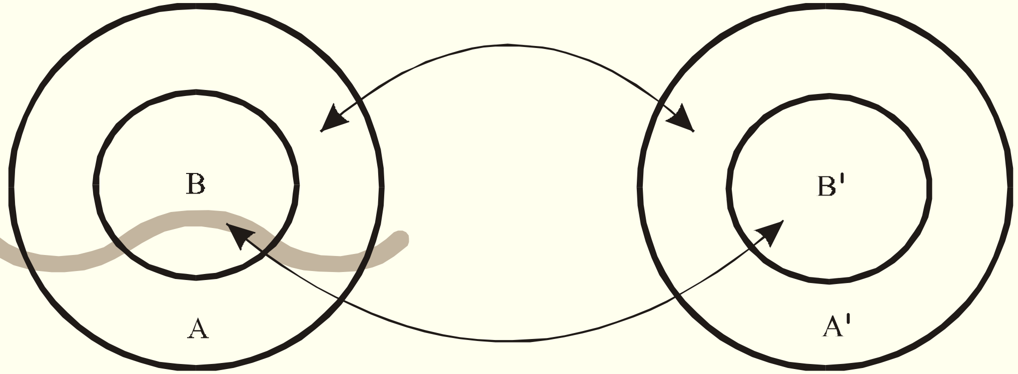
9. Teorema (potreban i dovoljan uslov egzistencije razlike). Razlika $a - b$ dva prirodna broja $a, b \in N$ je prirodni broj ako i samo ako je $a > b$.

Dokaz. Ako je $a > b$ onda sledi da postoji $c \in N$ takav da je $a = b + c \Leftrightarrow c = a - b$ je prirodni broj. Obratno, neka je razlika $c = a - b$ prirodan broj. Po definiciji razlike je $a = b + c$ pa sledi $a>b.$

Zbog ove osobine kaže se da oduzimanje nije zatvorena, tj. nije potpuno definisana operacija u skupu N svih prirodnih brojeva. Često se kaže da je oduzimanje delimično definisana operacija u skupu N.

10. Teorema (jednoznačnost razlike). Neka su a i b dva prirodna broja takva da je $a>b$. Tada je razlika $a - b$ jednoznačno određen prirodni broj.

Dokaz. Neka su $A, B,$ i A', B' konačni skupovi takvi da je $k(A) = K(A') = a$, $k(B) = k(B') = b$, $B \subseteq A$ i $B' \subseteq A'$. Iz uslova teoreme sledi da je $A \setminus B \neq \emptyset$ i $A' \setminus B' \neq \emptyset$ i da postoji bijekcija $\tau: B \to B'$, tj. $B \sim B'$ (*Sika 3.*). Neka je $A \setminus B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, definišemo preslikavanje $\varphi: A \setminus B \to A' \setminus B'$ na sledeći način: $\varphi(x_1) = y_1$, gde je y_1 proizvoljan element skupa $A' \setminus B'$. Takav element postoji jer je $A' \setminus B' \neq \emptyset$. Dalje, $\varphi(x_2) = y_2$ gde je y_2 proizvoljan element skupa $A' \setminus B'$ različit od y_1. Ako element y_2 ne postoji onda $B' \cup \{y1\} = A'$. Iz uslova $A \sim A'$ i $B \cup \{x_1\} \sim B' \cup \{y_1\}$ sledi $A \sim B \cup \{x_1\}$ što nije moguće jer konačan skup ne može biti ekvivalentan sa svojim pravim podskupom. Dakle, ako postoji $\mathbf{y_1 = \varphi(x1)}$ onda postoji $y_2 \neq y_1$ i $\varphi(x_2) = y_2$. Isto se tako dokazuje da ako postoji $y_{k-1} = \varphi(x_{k-1})$ onda postoji $y_k \neq y_{k-1}$ i $\varphi(x_k) = y_k$, $k \leq n$. Ovaj postupak nastavjlamo sve dok se ne iscrpe svi elementi skupa $A \setminus B$. Po ovoj konstrukciji φ je injekcija. Dokažimo da je surjekcija. Kada se iscrpe svi elementi skupa $A \setminus B$ onda se iscrpe i svi elementi skupa $A' \setminus B'$; u suprotnom, ako bi ostao bar jedan element $y \in A' \setminus B'$ onda je $A \sim A' \setminus \{y\}$ i kako je $A \sim A'$ sledi $A' \sim A' \setminus \{y\}$ što nije moguće zbog konačnosti skupa A'(konačan skup ne može biti ekvivalentan svom pravom podskupu). Dakle, φ je bijekcija tj. $A \setminus B \sim A' \setminus B'$ i teorema je dokazana.



Slika 3.

Operacija oduzimanje u skupu ***N*** prirodnih brojeva nije komutativna tj. $a - b \neq b - a$. Zaista, ako razlika $a - b$ postoji onda je $a > b$ i razlika $b - a$ čak i ne postoji. Na primer za $a = 10$ i $b = 5$ razlika $10 - 5 = 5$, a razlika $5 - 10$ ne postoji.

Operacija oduzimanje u skupu **N** prirodnih brojeva nije asocijativna tj. $(a - b) - c \neq a - (b - c)$. Na primer za $a = 9$, $b = 5$ **i** $c = 2$ imamo $(a-b) - c = (9-5) - 2 = 4 - 2 = 2$, $a - (b - c) = 9 - (5 - 2) = 9 - 3 = 6$ što dokazuje ovo tvrđenje.

Objasnimo kako učenici pomoću operacija sabiranje i oduzimanje samostalno otkrivaju zakon komutativnosti za sabiranje. Napredniji učenici samostalno otkrivaju da je

$$a + b = (a + c) + (b - c) = (a - c) + (b + c)$$

kao u sledećem primeru: U dve korpe ima jabuka. Neko uzme nekoliko jabuka iz jedne korpe i stavi u drugu. Učenici sami otkrivaju da posle toga ukupan broj jabuka u korpama ostaje isti. Koristeći ovaj zakon učenici računaju

$$7 + 4 = (7 - 1) + (4 + 1) = 6 + 5 = (6 - 1) + (5 + 1) = 5 + 6 = (5 - 1) + (6 + 1) = 4 + 7.$$

Dakle, $7 + 4 = 4 + 7.$

Posle nekoliko takvih primera učenici samostalno otkrivaju da se zbir ne menja ako sabirci promene mesta, tj. da važi zakon komutativnosti za operaciju sabiranje.

LITERATURA

1. Dragičević, L: ***Metodika nastave matematike sa užestručnim prilozima za praksu,*** Bijeljina, 2000.
2. Kočinac, Lj., Mandak, A.: ***Algebra II,*** Univerzitet u Prištini, Priština, 1996.
3. Kurepa, S.: ***Uvod u matematiku, skupovi - structure - brojevi,*** Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.
4. Kurepa, Đ.: ***Skupovi što su i kakva im je uloga***, Školska knjiga, Zagreb, 1960.
5. Krulj, R., Kačapor, S., Kulić R.: ***Pedagogija***, Svet knjige, Beograd, 2002.
6. Marjanović, M.: ***Metodika matematike, prvi deo,*** Učiteljski fakultet, Beograd, 1996.
7. Marjanović, M.: ***Metodika matematike, drugi deo,*** Učiteljski fakultet, Beograd, 1996.
8. Marjanović, M., Latković, M., Nikodijević, B.: ***Matematika za 1. razred osnovne škole,*** Zavod za udžbenike i nastavna sredstva Beograd, 2001.
9. Malinović, T.: ***Osnovi nastave matematike***, Vranje, 1988.
10. Мерзон, А. Е., Добротворский, А. С., Чекин А. Л.: ***Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов,*** Москва-Воронеж, 1998.
11. Milić, S.: ***Elementi matematičke logike i teorije skupova***, Novi Sad, 1981.
12. Nikolić, M.: ***Uvodne teme u metodiku matematičkog obrazovanja***, Mlado pokolenje, Beograd, 1967.
13. Pinter, J., Sotirović, V., Petrović, N., Lipovac, D.: ***Opšta metodika nastave matematike,*** Učiteljski fakultet, Sombor, 1996.
14. Prvanović, S.: ***Metodika savremenog matematičkog obrazovanja***, Zavod za ud`benike i nastavna sredstva Srbije, Beograd, 1970.
15. Prvanović, S.: ***Metodika nastave matematike***, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva Srbije, Beograd, 1974.
16. Prešić, M., Prešić, S.: ***Uvod u matematičku logiku,*** Matematički institut, Beograd, 1979.
17. Prešić, S.: ***Savremeni pristup nastavi matematike,*** Nastava i vaspitanje, 1-2, Beograd, 1976.
18. Špijunović, K.: ***Metodika početne nastave matematike***, - Bibliografija - , Učiteljski fakultet, Užice, 2003.