# РЕЛАЦИЈЕ

**<u>Дефиниција:</u>** Нека су A и B непразни скупови. Скуп $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ назива се Декартов производ скупа A и скупа B.

- Декартов производ два скупа је скуп уређених парова таквих да је први елемент уређеног пара елеменат првог скупа, док је други елемент уређеног пара елеменат другог скупа.

**<u>Дефиниција:</u>** Релација $\rho$ дужине $n$ је непразан подскуп Декартовог производа $n$ скупова. Када је $n = 2$ тада говоримо о **<u>бинарној релацији</u>**, дакле о релацији између елемента $a$ са елементом $b$, односно о уређеном пару $(a,b)$ из Декартовог производа $A \times B$.

**<u>Дефиниција:</u>** Нека су A и B дати скупови. Сваки непразан подскуп $\rho$ Декартовог производа $A \times B$, тј. $\phi \neq \rho \subseteq A \times B$ назива се **<u>релација.</u>**

**<u>Пример:</u>** Примери релација су:

1) Релација једнакости бројева ( $x = y$ ).
2) Релација ,,бити паралелан" у скупу правих ( $a \parallel b$ ).
3) Релација ,,мање или једнако" у скупу реалних бројева ( $\leq$ ).

**<u>Дефиниција:</u>** Сваки непразан подскуп $\rho$ Декартовог квадрата $A^2 = A \times A$ назива се релација скупа A.

- Ако су елементи $a$ и $b$ у релацији то можемо записати на два начин:
  1) $a\rho b$ и читамо ,, $a$ је у релацији $\rho$ са $b$"
  2) $(a,b) \in \rho$ и читамо ,,уређени пар $(a,b)$ припада релацији $\rho$ "
- Ако $(a,b) \notin \rho$ онда се каже ,,$a$ није у релацији $\rho$ са $b$"

**<u>Дефиниција:</u>** Особине релације $\rho$ у скупу A:

1. **<u>Рефлексивност</u>** $(\forall a \in A)$ $a\rho a$ или $(a,a) \in \rho$
   (елемент $a$ је у релацији сам са собом)

2. **<u>Симетричност</u>** $(\forall a,b \in A)$ $a\rho b \Rightarrow b\rho a$ или $(a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho$
   (ако је $a$ у релацији са $b$, онда је и $b$ у релацији са $a$)

3. **<u>Антисиметричност</u>** $(\forall a,b \in A)$ $a\rho b \wedge b\rho a \Rightarrow a = b$

или $(a,b)\in\rho \;\wedge\; (b,a)\in\rho \;\Rightarrow\; a=b$

(ако је $a$ у релацији са $b$ и $b$ у релацији са $a$ онда је $a=b$)

4. **<u>Транзитивност</u>** $(\forall a,b,c\in A)\quad a\rho b \;\wedge\; b\rho c \;\Rightarrow\; a\rho c$

   или $(a,b)\in\rho \;\wedge\; (b,c)\in\rho \;\Rightarrow\; (a,c)\in\rho$

   (ако је $a$ у релацији са $b$ и $b$ у релацији са $c$ онда је и $a$ у релацији са $c$ - или најједноставније ако је први елемент у релацији са другим, други у релацији са трећим, онда је и први у релацији са трећим).

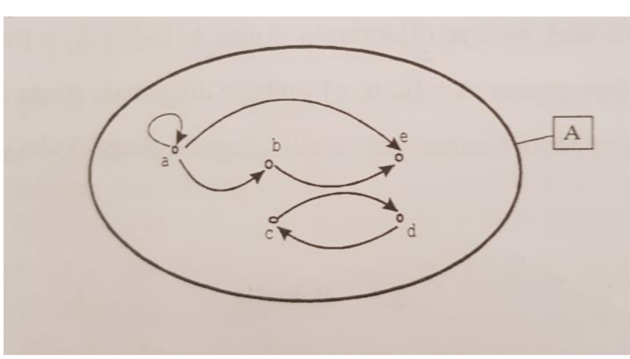
**<u>Дефиниција:</u>** Релација $\rho$ која има особине: рефлексивност, симетричност и транзитивност назива се **<u>релација еквиваленције</u>** (Р-С-Т релација).

**<u>Дефиниција:</u>** Релација $\rho$ која има особине: рефлексивност, антисиметричност и транзитивност назива се **<u>релација поретка</u>** (Р-А-Т релација).

**Пример:** Релација „$\le$“ (мање или једнако) у скупу природних бројева N је релација поретка јер важи:

1) $x\le x,\quad (\forall x\in N)$ рефлексивност;
2) $(x\le y)\;\wedge\;(y\le x)\;\Rightarrow\; x=y,\quad (\forall x,y\in N)$ антисиметричност;
3) $(x\le y)\;\wedge\;(y\le z)\;\Rightarrow\;(x\le z)\quad (\forall x,y,z\in N)$ транзитивност.

- Релација $\rho$ скупа А може се представити на три начина:
  1) **Скупом** нпр. $\rho=\{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(2,5)\}$
  2) Графички помоћу **<u>графа релације</u>**
  3) **Таблично**




Граф релације

| $\rho$ | **a** | **b** | **c** |
|---|---|---|---|
| **1** | T | T | T |
| **2** | $\perp$ | T | $\perp$ |
| **3** | $\perp$ | T | T |

Таблица релације $\rho$

**<u>Дефиниција:</u>** Нека је $\rho$ релација еквиваленције скупа А. Скуп А се разбија на такозване **<u>класе еквиваленције</u>** $C_a$ где је $C_a = \{x \mid x \in A \wedge a\rho x\}$, тако да важи:

1) Унијом свих класа еквиваленције скупа А добија се скуп А
2) Сваки елемент из скупа А је елемент своје класе еквиваленције
3) Класе еквиваленције су дисјунктне тј. различите класе немају ни један заједнички елемент.

**<u>Дефиниција:</u>** Нека је $\rho$ релација еквиваленције скупа А. Ако $\rho$ раставља скуп А на дисјунктне подскупове - класе еквиваленције, тада скуп свих класа еквиваленције означавамо са $A_{/\rho}$ и називамо **<u>количник скуп</u>** или **<u>фактор скуп</u>**.

$$A_{/\rho} = \{C_a \mid a \in A\}$$

## ЗАДАЦИ

**1.** У скупу $A = \{1,2,3,4\}$ дефинисана је релација:

$$a\rho b \quad \Leftrightarrow \quad a = 2b$$

Представи ову релацију помоћу скупа, графа и таблично.

**Решење:**

$A = \{1,2,3,4\}$

$A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

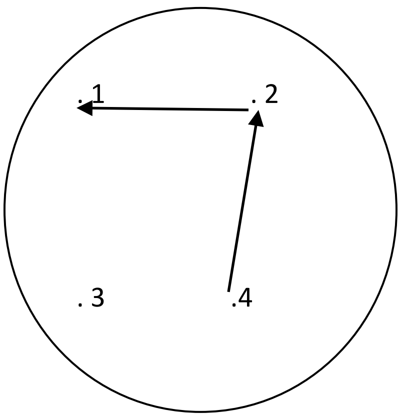
$$a\rho b \quad \Leftrightarrow \quad a = 2b$$

Сада формирамо релацију коју чине уређени парови за које је задовољен услов да је први елемент уређеног пара једнак двострукој вредности другог елемента. Водимо рачуна да су нам на располагању само елементи скупа А, што значи да нпр. (6,3) није из релације јер број 6 не припада скупу А.

$$\rho = \{(a,b) \mid a = 2b\} = \{(2,1),(4,2)\}$$ - скуповно представљање релације

$$a = 2b = 2 \cdot 1 = 2 \qquad b = 1$$

Сада видимо да је добијена релација непразан скуп и подскуп Декартовог производа $A \times A$ тј. $\rho = \{(2,1),(4,2)\} \subset A \times A$. Ово значи да је задовољена дефиниција релације.




**Граф релације**

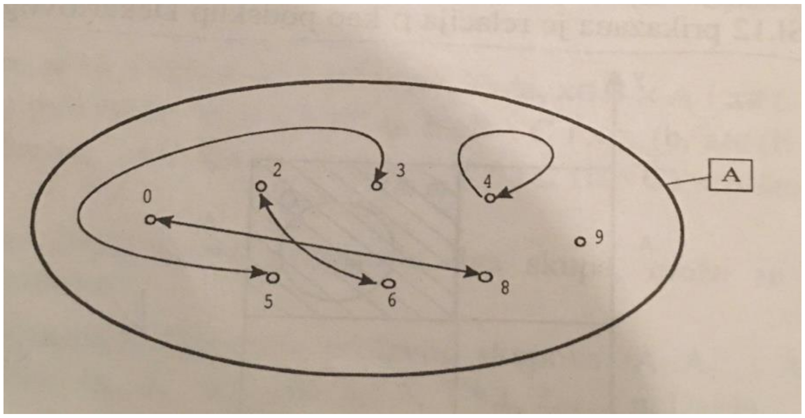
Како је $\rho = \{(2,1),(4,2)\}$ то значи да је за уређени пар (2,1) број 2 у релацији са 1, на графу релације стрелица иде од броја 2 према броју 1. Затим за уређени пар (4,2) значи да је 4 у релацији са 2 па је стрелица усмерена од броја 4 према броју 2.

| $\rho$ | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ |
| **2** | T | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ |
| **3** | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ |
| **4** | $\perp$ | T | $\perp$ | $\perp$ |

**Таблица релације**

У заглављу таблице се уносе елементи скупа А. Како је $\rho = \{(2,1),(4,2)\}$ за први уређени пар (2,1) уписује се Т у пресеку друге врсте и прве колоне ( друга врста одговара броју 2 и прва колона одговара броју 1). За уређени пар (4,2) уписује се Т у пресеку врсте која одговара броју 4 и колоне која одговара броју 2. Како наша релација нема више елемената на свим осталим местима се уписује $\perp$.

**2.** На основу графа релације датог у задатку одредити релацију $\rho$ .




**Решење:**

Види се да је $A = \{0,2,3,4,5,6,8,9\}$.
$\rho = \{(0,8),(8,0),(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}$

Како је стрелица нпр. између 0 и 8 обострана то значи да је 0 у релацији са 8 тј. $(0,8) \in \rho$. Такође је и 8 у релацији са 0 па је и $(8,0) \in \rho$. Како стрелица иде од броја 4 према броју 4 то значи да је број 4 у релацији сам са собом тј. $(4,4) \in \rho$

**3.** На скупу $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ дефинисана је релација $\rho$ на следећи начин:

$$x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 8$$

Одредити релацију $\rho$ .

**Решење:** $\rho = \{(x, y) \mid x + y = 8\} = \{(0,8),(8,0),(1,7),(7,1),(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}$.

**4.** На скупу $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ дефинисана је релација $\rho$ на следећи начин:

$$x\rho y \quad \Leftrightarrow \quad y > x$$

Одредити релацију $\rho$.

**Решење:** $\rho = \{(x, y) \mid y > x\} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$

$(2,7),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(4,5),(4,6),(4,7),(5,6),(5,7),(6,7)\}$.

Овде су уређени парови облика $(x,y)$ а релација је таква да је $y > x$ што значи да је други елемент уређеног пара већи од првог, тај услов је задовољен нпр. код $(1,2)$ али није задовољен код нпр. $(2,1)$.

$x$ $y>x$

$x$ $y$ – овде $y$ није веће од $x$

**5.** Нека је дат скуп $E = \{1,2,3,4\}$ и на њему дефинисана релација

$$\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$$

Испитати да ли је релација $\rho$ релација еквиваленције.

**Решење:**

Да би релација била релација еквиваленције према дефиницији она мора да буде рефлексивна, симетрична и транзитивна.

1) <u>Рефлексивност</u>

$(\forall x \in E) \quad (x,x) \in \rho$
$(1,1) \in \rho$;
$(2,2) \in \rho$;
$(3,3) \in \rho$;
$(4,4) \in \rho$. Важи рефлексивност.

2) <u>Симетричност</u>

$(\forall x,y \in E) \quad (x,y) \in \rho \quad \Rightarrow \quad (y,x) \in \rho$
$(1,2) \in \rho \quad \Rightarrow \quad (2,1) \notin \rho$;
$(1,3) \in \rho \quad \Rightarrow \quad (3,1) \notin \rho$;
$(1,4) \in \rho \quad \Rightarrow \quad (4,1) \notin \rho$;
$(2,3) \in \rho \quad \Rightarrow \quad (3,2) \notin \rho$;
$(2,4) \in \rho \quad \Rightarrow \quad (4,2) \notin \rho$;
$(3,4) \in \rho \quad \Rightarrow \quad (4,3) \notin \rho$. Не важи симетричност.

3) <u>Транзитивност</u>

$$(\forall x, y, z \in E) \quad (x, y) \in \rho \;\wedge\; (y, z) \in \rho \;\Rightarrow\; (x, z) \in \rho$$

$(1,2) \in \rho \;\wedge\; (2,3) \in \rho \;\Rightarrow\; (1,3) \in \rho$;
$(1,2) \in \rho \;\wedge\; (2,4) \in \rho \;\Rightarrow\; (1,4) \in \rho$;
$(1,3) \in \rho \;\wedge\; (3,4) \in \rho \;\Rightarrow\; (1,4) \in \rho$;
$(2,3) \in \rho \;\wedge\; (3,4) \in \rho \;\Rightarrow\; (2,4) \in \rho$. Транзитивност важи.

Код транзитивности је важно:

$(1,2) \in \rho \;\wedge\; (2,3) \in \rho \;\Rightarrow\; (1,3) \in \rho$;

исти елементи

За ову релацију важи рефлексивност и транзитивност али не важи симетричност што значи да релација није релација еквиваленције.

**6.** Испитати да ли је релација $\rho$ дефинисана на следећи начин:
$\rho = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,3),(3,1),(3,5),(4,4),(4,2),(5,5),(5,1),(5,3)\}$
релација еквиваленције дефинисана на скупу $E = \{1,2,3,4,5\}$. Нацртати граф дате релације, одредити класе еквиваленције и количник скуп.

**Решење:**

1) Рефлексивност

$(\forall x \in E) \quad (x, x) \in \rho$
$(1,1) \in \rho$;
$(2,2) \in \rho$;
$(3,3) \in \rho$;
$(4,4) \in \rho$;
$(5,5) \in \rho$. Важи рефлексивност.

2) <u>Симетричност</u>

$$(\forall x, y \in E) \quad (x,y) \in \rho \;\Rightarrow\; (y,x) \in \rho$$

$(1,3) \in \rho \;\Rightarrow\; (3,1) \in \rho$;

$(1,5) \in \rho \;\Rightarrow\; (5,1) \in \rho$;

$(2,4) \in \rho \;\Rightarrow\; (4,2) \in \rho$;

$(3,5) \in \rho \;\Rightarrow\; (5,3) \in \rho$. Важи симетричност.

3) <u>Транзитивност</u>

$$(\forall x, y, z \in E) \quad (x,y) \in \rho \;\wedge\; (y,z) \in \rho \;\Rightarrow\; (x,z) \in \rho$$

$(1,3) \in \rho \;\wedge\; (3,5) \in \rho \;\Rightarrow\; (1,5) \in \rho$;

$(1,5) \in \rho \;\wedge\; (5,3) \in \rho \;\Rightarrow\; (1,3) \in \rho$;

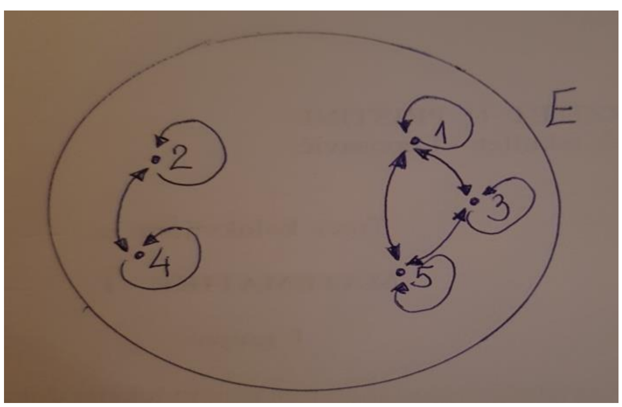
$(3,1) \in \rho \;\wedge\; (1,5) \in \rho \;\Rightarrow\; (3,5) \in \rho$;

$(3,5) \in \rho \;\wedge\; (5,1) \in \rho \;\Rightarrow\; (3,1) \in \rho$;

$(5,1) \in \rho \;\wedge\; (1,3) \in \rho \;\Rightarrow\; (5,3) \in \rho$;

$(5,3) \in \rho \;\wedge\; (3,1) \in \rho \;\Rightarrow\; (5,1) \in \rho$. Транзитивност важи.

Релација $\rho$ јесте релација еквиваленције зато што важи рефлексивност, симетричност и транзитивност.




Граф релације

Са графа релације се јасно види да је скуп E разврстан на две класе еквиваленције.

$$C_1 = \{1,3,5\} \quad \text{и} \quad C_2 = \{2,4\}$$

Скуп Е је унија добијених класа еквиваленције тј. $E = C_1 \cup C_2 = \{1,2,3,4,5\}$.

Са графа се види да су класе еквиваленције дисјунктни скупови-немају заједничких елемената. (Елементи једне класе су у релацији сами са собом и између себе, али нису у релацији са елементима друге класе).

$$E_{/\rho} = \{C_1, C_2\} = \{\{1,3,5\}, \{2,4\}\}$$ - количник скуп.

(Количник скуп је скуп свих класа еквиваленције датог скупа).

7. Одредити релацију еквиваленције чији је количник скуп:

$$S_{/\rho} = \{\{0\}, \{1,4\}, \{2,5\}, \{3,6,7\}\}.$$

**Решење:**

Из $S_{/\rho} = \{\{0\}, \{1,4\}, \{2,5\}, \{3,6,7\}\}$ се види да је $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

Уочавамо да су класе еквиваленције:

$C_0 = \{0\}$, $C_1 = \{1,4\}$, $C_2 = \{2,5\}$, $C_3 = \{3,6,7\}$.

Елементи једне класе су у релацији са собом и између себе тако да је:

$C_0 = \{0\} \Rightarrow (0,0) \in \rho$

$C_1 = \{1,4\} \Rightarrow (1,1) \in \rho;\ (4,4) \in \rho;\ (1,4) \in \rho;\ (4,1) \in \rho;$

$C_2 = \{2,5\} \Rightarrow (2,2) \in \rho;\ (5,5) \in \rho;\ (2,5) \in \rho;\ (5,2) \in \rho;$

$C_3 = \{3,6,7\} \Rightarrow (3,3) \in \rho;\ (6,6) \in \rho;\ (7,7) \in \rho;\ (3,6) \in \rho;\ (6,3) \in \rho;\ (3,7) \in \rho;\ (7,3) \in \rho;$

$(6,7) \in \rho;\ (7,6) \in \rho;$

На основу свега закључујемо да је:

$$\rho = \{(0,0),(1,1),(4,4),(1,4),(4,1),(2,2),(5,5),(2,5),(5,2),(3,3),(6,6),(7,7),(3,6),(6,3),(3,7),(7,3),$$
$$(6,7),(7,6)\}.$$

8. Само је једна од следећих релација на скупу $A = \{1,2,3\}$

а) $\rho_1 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(1,3),(3,3)\}$

б) $\rho_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(2,3),(1,3),(3,2),(3,1),(3,3)\}$

ц) $\rho_3 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}$

релација еквиваленције, која је то релација? Објаснити зашто остале релације нису релације еквиваленције.

**Решење:**

а) Релација $\rho_1$ јесте рефлексивна јер је $(1,1) \in \rho_1$, $(2,2) \in \rho_1$, $(3,3) \in \rho_1$.

Није симетрична јер нпр. $(1,2) \in \rho_1$ али $(2,1) \notin \rho_1$.

Није транзитивна јер нпр. $(1,2) \in \rho_1$ и $(2,3) \in \rho_1$ док $(1,3) \notin \rho_1$.

Значи да $\rho_1$ није релација еквиваленције.

б) Релација $\rho_2$ јесте рефлексивна јер $(1,1) \in \rho_2$, $(2,2) \in \rho_2$, али $(3,3) \in \rho_2$.

Релација $\rho_2$ јесте симетрична јер

$(1,2) \in \rho_2 \Rightarrow (2,1) \in \rho_2$;

$(1,3) \in \rho_2 \Rightarrow (3,1) \in \rho_2$;

$(2,3) \in \rho_2 \Rightarrow (3,2) \in \rho_2$.

Релација $\rho_2$ јесте транзитивна јер $(1,2) \in \rho_2$ и $(2,3) \in \rho_2 \Rightarrow (1,3) \in \rho_2$.

Значи да је $\rho_2$ релација еквиваленције.

ц) Релација $\rho_3$ није рефлексивна јер $(1,1) \in \rho_3$, $(3,3) \in \rho_3$ али $(2,2) \notin \rho_3$ што значи да није ни релација еквиваленције.

**9.** На скупу $A = \{0,1,2,3\}$ дефинисана је релација $\rho$ на следећи начин:

а) $x \rho y \quad \Leftrightarrow \quad x + y > 3$

б) $x \rho y \quad \Leftrightarrow \quad x + y \geq 3$

Испитати да ли су дате релације релације еквиваленције применом таблице.

**Решење:**

а)

| $\rho$ | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ |
| **1** | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | T |
| **2** | $\perp$ | $\perp$ | T | T |
| **3** | $\perp$ | T | T | T |

Таблица релације главна дијагонала

**Рефлексивност**

Из таблице се види да рефлексивност не важи, сваки елемент није у релацији сам са собом нпр. $(0,0) \notin \rho$. **Услов да важи рефлексивност је да на главној дијагонали буду све Т вредности.**

**Симетричност**

Из таблице се види да важи симетричност нпр. $(1,3) \in \rho \quad \Rightarrow \quad (3,1) \in \rho$ . **Ако је таблица релације симетрична у односу на главну дијагоналу то значи да важи симетричност.**

**Антисиметричност**

Из таблице уочавамо да важи $(1,3) \in \rho$ и $(3,1) \in \rho$ али $1 \neq 3$ што значи да не важи антисиметричност.

**Транзитивност**

Видимо да је $(1,3) \in \rho$ и $(3,2) \in \rho$ али $(1,2) \notin \rho$, што значи да не важи транзитивност.

Како не важи рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност то значи да дата релација није релације еквиваленције ни релација поретка.

б)

| $\rho$ | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | $\perp$ | $\perp$ | $\perp$ | T |
| **1** | $\perp$ | $\perp$ | T | T |
| **2** | $\perp$ | T | T | T |
| **3** | T | T | T | T |

Таблица релације

Као и у примеру а) ова релација није рефлексивна јер сваки елемент није у релацији сам са собом. (На главној дијагонали нису све вредности Т). Ова релација јесте симетрична јер је таблица релације симетрична у односу на главну дијагоналу. Није антисиметрична јер нпр. $(1,2) \in \rho$ и $(2,1) \in \rho$ али $1 \neq 2$. Ова релација није ни транзитивна јер нпр. $(0,3) \in \rho$ и $(3,1) \in \rho$ али

$(0,1) \notin \rho$. На основу свега се закључује да дата релација није релација еквиваленције као ни релација поретка.