

# МАТЕМАТИЧКО МИШЉЕЊЕ

- Математичко мишљење се одликује строгошћу и ригорозношћу примене мисаоних операција.
- Карактеристике математичког мишљења:
  1. Апстрактност,
  2. Тачност – логичка строгост,
  3. Оригиналност,
  4. Флексибилност,
  5. Флуентност (гипкост),
  6. Редифиниција,
  7. Елаборација.

# МАТЕМАТИЧКО МИШЉЕЊЕ

## 1. Апстрактност

- Математички објекти јесу апстрактни, али проистичу из конкретне стварности.
- При посматрању скупа материјалних предмета, посматрач одбацује низ својстава тог скупа, а задржава само једно или неколико битних својстава.
- Апстракција се даље може вршити и на већ формираним математичким објектима, чиме се врши њихова генерализација.
- Нивои апстракције:
  - Размишљање о предметима који су тренутно доступни чулима,
  - Размишљање о познатим предметима који тренутно нису доступни чулима,
  - Размишљање о материјалним предметима са којима особа није упозната или имагинарне визије, варијације и комбинације познатих и стварних материјалних објеката.
  - Математичко размишљање – формирање математичких појмова апстрахованих из стварног света.

**Пример:** Размотрити поступак ученика који треба да израчуна површину зидова учионице.

## 2. Тачност – логичка строгост

- У математици се већина резултата исказује квантитативно, што је карактерише као прецизну науку.
- Тачност у ширем смислу подразумева тачност свих закључака до којих се долази применом закона логичког мишљења.

# МАТЕМАТИЧКО МИШЉЕЊЕ

3. Оригиналноост се приписује оним продуктима мисаоних делатности којима се долази до нечег новог, необичног, ретког.

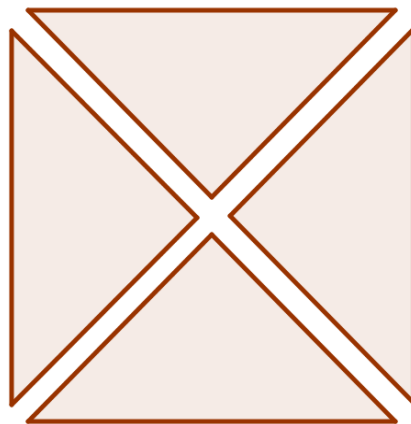
- Основна карактеристика оригиналноости изналажење решења која претходно нису била позната,
- Уколико је нешто ново за ученике, али не и за научну заједницу, онда се и то сматра њиховом оригиналношћу.
- У овом случају, оригиналноост се испољава у коришћењу познатих садржаја на нов и необичан начин, као и досетљивости и духовитости у њиховом коришћењу.

**Пример:** Којом цифром се завршава производ  $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 7$  који је сачињен од 100 чинилаца?

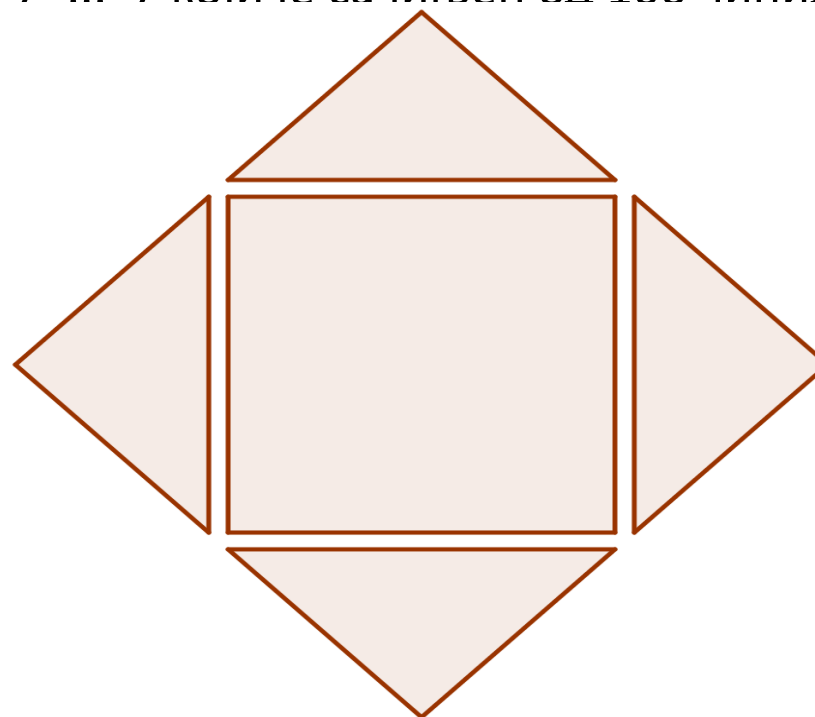
- Знање ученика је неопходно, али није гаранција за

4. Флексибилност

- Избежавати стереотипна решења и укључивање обл
- Промена
- Спречава



ење  
а се  
Как



ачине.

са другим

**Пример:**

# МАТЕМАТИЧКО МИШЉЕЊЕ

## 5. Флуентност (гипкост)

- Развијање већег броја идеја на истом математичком садржају. Притом, битан је што већи број идеја (квантитет).

**Пример:** Треба направити железничку композицију са три путничка и два теретна вагона. На колико се начина може начинити композиција, ако се зна да теретни вагони не смеју бити један крај другог?

6. Редефиниција – способност да се подаци дати у задатку употребе на нов, другачији начин, тј. осмисле језичком формом која је ближа и разумљивија и омогућава лакше решавање задатка.

7. Елаборација – способност да се идеје дате у задатку разлажу, развијају и допуњавају новим идејама, чиме се постепено приближавамо решењу.

**Пример:** Које оцене из метаматике су добиле Анка, Бранка и Данка, ако Анка нема 3, Данка нема 3 и нема 5, а у одељењу нема јединица и двојки и ако се зна да су све три добиле различите оцене?

# МАТЕМАТИЧКО МИШЉЕЊЕ

Смернице:

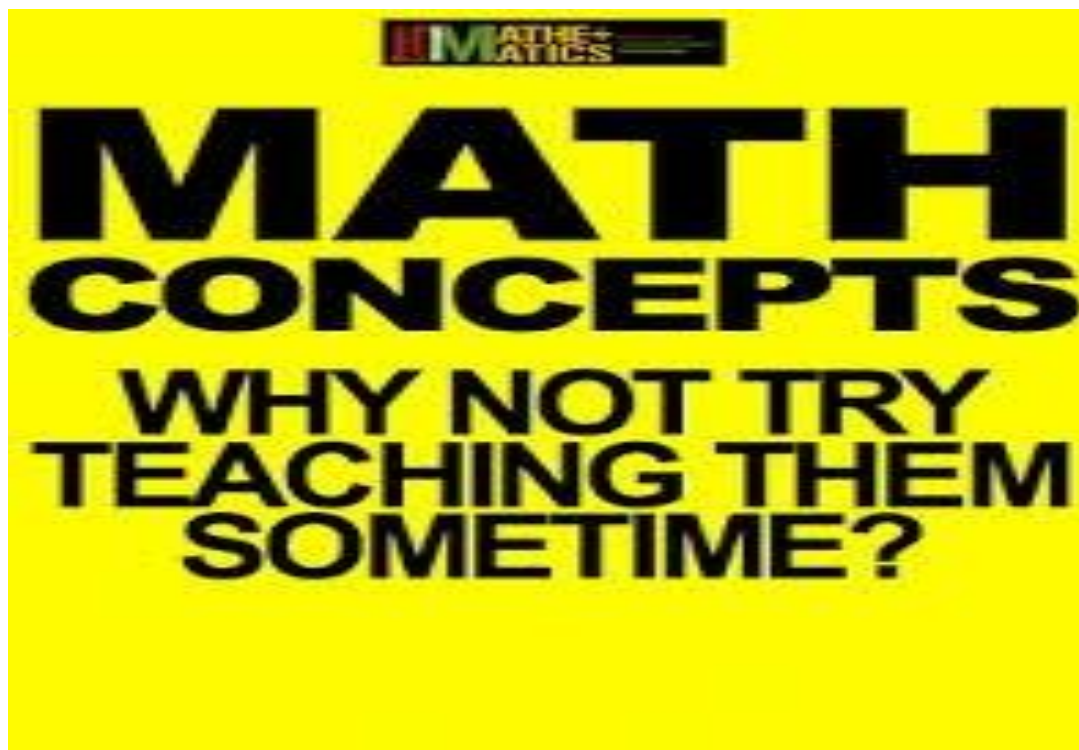
- Не инсистирати на томе да ученици обавезно решавају задатке по одређеном правилу или редоследу, јер се тиме лако ствара навика механичког, шаблонског решавања задатака – дресура.
- Упућивати ученике на систематичан приступ математичким садржајима уз развијање и неговање свих аспеката математичког мишљења.

# МАТЕМАТИЧКО МИШЉЕЊЕ



# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

Обим, садржај, дефиниција и класификација



# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

## Обим, садржај, дефиниција и класификација

- Трајност математичких знања се постиже само уз усмерени развој мишљења.
  - Један од главних задатака савремене наставе математике је развој мишљења ученика, посебно стваралачког мишљења.
- Облици мишљења:
  - Разумевање – појмови,
  - Расуђивање – судови,
  - Закључивање – закључци, логички судови.
- Пример 1:
  - „Права која пролази кроз средиште дужи и нормална је на њу зове се симетрала дужи.“ – појам дат дефиницијом.
  - „Кроз тачку ван дате праве може се поставити јединствена права паралелна датој правој.“ – суд (аксиома еуклидске геометрије).
  - „Ако је  $a \leq b$  и  $b \leq c$ , тада је и  $a \leq c$ .“ – закључак.



# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

## Обим, садржај, дефиниција и класификација

- Појам (П) је облик мишљења којим се изражавају битна својства неког објекта (стварног или апстрактног) или релације.
- Формирање појма у спознаји човека је неодвојиво од његовог изражавања речима, записом или симболом.
  - Запажање објеката и конкретних својстава,
  - Формирање представе о појму – уочавање општих и заједничких особина свих елемената посматраног скупа објеката,
  - Формирање и усвајање појма – издвајање битних општих својстава објекта.
- Симболика и реч при изражавању датог појма морају бити једнозначни.
  - Одступање може довести до нејсаноћа и неразумевања (нпр. права  $AB$ , дуж  $AB$ , растојање  $AB$ )
- Синоними (нпр. квадрат – ...) богатство језика, али и јасније и тачније одређење појма.

# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

## Обим, садржај, дефиниција и класификација

- Садржај појма (СП) је скуп свих битних обележја свих објеката или релација на које се може применити језички израз појма П.
- Обим појма (ОП) је скуп свих објеката или релација на које се може применити језички израз појма П.
- Потпуна узајамна одређеност СП и ОП (обрнута зависност).
- Пример2:
  - П – паралелне праве, СП – леже у истој равни, на једнаком су растојању, немају заједничких тачака или се подударају, ОП – сви парови паралелних правих.
  - П – паралелограм, СП – наспрамне странице паралелне и подударне, наспрамни углови подударни, суседни углови суплементни, дијагонале се полове, ..., ОП – ромбоид, ромб, правоугаоник, квадрат.
- Ако је  $ОП_1 \subset ОП_2$  , онда кажемо да је појам  $П_2$  род појма  $П_1$  , а појам  $П_1$  врста појма  $П_2$  .

# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

## Обим, садржај, дефиниција и класификација

- Пример 3:
  - Правоугаоник и ромб имају исте родове – паралелограм, трапез, четвороугао, многоугао, ...
  - Родови појма „природан број“ су цео ненегативан број, цео број, рационалан број, реалан број, комплексан број.
- Врсте појмова
  - Основни – не дефинишу се – тачка, права, раван, простор, скуп, ...
  - Изведени – морају се јасно и прецизно дефинисати помоћу основних или других већ дефинисаних појмова.
- Дефиниција појма је набрајање потребних и довољних обележја појма повезаних логичком реченицом или симболичким записом.
  - У дефиницији не сме бити сувишних речи нити недостатака који би довели до недоумица или неразумевања појма – минималност садржаја.
  - ППП – природност, прикладност, применљивост дефиниције.
  - Све дефиниције истог појма морају бити међусобно еквивалентне.

# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

Обим, садржај, дефиниција и класификација

- Начини дефинисања математичких појмова:
  - Помоћу најближег рода и разлике врсте:
    - Паралелограм чији је један унутрашњи угао прав зове се правоугаоник.
  - Набрајањем битних обележја појма:
    - Две равни зовемо паралелним равнима ако оне немају заједничке тачке.
  - Индуктивна дефиниција:
    - Низ чији је сваки члан једнак збиру претходног члана и константе зове се аритметички низ.
  - Генетичка дефиниција (описује начин настанка појма):
    - Део равни који опише полуправа ротацијом око свог почетка зове се угао.
  - Конвенционална дефиниција (договор):
    - Скуп који нема ни један елемент назива се празан скуп.

# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

Обим, садржај, дефиниција и класификација

- Правила дефинисања појмова:
  - Дефиниција мора бити примерена дефинисаном појму, ни преуска, ни преопширна, мора разоткривати суштину појма.
  - Дефиниција мора бити прегледна и сажета.
  - Дефиниција мора бити савремена.
  - Дефиниција не сме бити изражена сликовитим или двосмисленим језиком.
  - Дефиниција не сме бити циркуларна.
  - Дефиниција не сме бити негативна, уколико може да буде позитивна.
  - Опсег појма који се дефинише не сме бити празан скуп.

# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

Обим, садржај, дефиниција и класификација

- Примери:

4. „За две праве кажемо да су паралелне ако се не секу и не поклапају се.“

- Преопширна дефиниција, изостављено битно обележје „леже у истој равни“.

5. „Паралелограм је четвороугао који има два пара наспрамних паралелних страница једнаких дужина.“

- Својства „наспрамне странице су паралелне“ и „наспрамне странице су једнаких дужина“ су еквивалентна, могу се извести једно из другог.

6. „Праве које захватају прав угао су узајамно нормалне праве.“ „Угао чији су краци узајамно нормални зове се прав угао.“

- Дефиниција је циркуларна

7. „Реалан број који није рационалан назива се ирационалан број.“

- Негативна дефиниција, а може се исказати позитивном реченицом (бесконачан непериодичан број).

8. „Троугао који има два права унутрашња угла назива се двоправоугли троугао.“

- Опсег појма у еуклидској геометрији је празан скуп. (У сферној геометрији није!!!)

9. Дефиниције у речницима, приручницима, енциклопедијама...

- Препоручујемо слушаоцу да попуни за домаћи задатак!

# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

Обим, садржај, дефиниција и класификација

Завршне напомене:

- Процес формирања појмова у настави математике не мора (понекад и не може) бити прецизан и строг као исти процес у науци, што зависи од узраста и предзнања ученика. Поједностављења су дозвољена све док се не нарушава принцип научности у настави.
- Нивои мишљења ученика
  - На најнижем нивоу ученик геометријске ликове (нпр. ромб, трапез, правоугаоник) разликује по облику и не уочава везу међу њима.
  - Виши ниво је дефинисање тих ликова, чиме се завршава процес формирања одговарајућих појмова (у овој фази ученик постаје свестан да су ромб и правоугаоник трапези).

| Етапе наставног процеса  | Психолишке етапе формирања појма     | Конкретно исказивање датог појма речима  |
|--|--------------------------------------|--|
| I корак: Практични примери за правоугаоник   | Перцептивно и препознавање по сећању | Прозорска стакла, површина стола   |
| II корак: Истицање битних и небитних особина појма, увођење термина којим се означава дати појам | Прелазак са перцепције на представу  | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Различити су по величини</li> <li>2. Објекти су од различитог материјала</li> <li>3. У различитим положајима</li> <li>4. Сви су четвороуглови</li> <li>5. Сви углови су им прави</li> <li>6. Уводи се термин правоугаоник</li> </ol> |
| III корак: Одвајање битних од небитних особина   | Прелаз од представе ка појму         | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Правоугаоник је четвороугао</li> <li>2. Сви углови правоугаоника су прави</li> <li>3. Припрема за дефинисање</li> </ol>  |
| IV корак: Илустрација појма  | Формирање појма                      | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Лист свеске</li> <li>2. Неке слике у уџбенику</li> <li>3. Странице квадрa</li> </ol>   |
| V корак: Могуће дефинисање појма   | Усвајање појма                       | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Правоугаоник је: <ol style="list-style-type: none"> <li>а) четвороугао</li> <li>б) сви углови су прави</li> </ol> </li> <li>2. Дефиниција: Правоугаоник је четвороугао чији су сви углови прави</li> </ol>                           |



# МАТЕМАТИЧКИ ПОЈАМ

Обим, садржај, дефиниција и класификација



# МИСАОНЕ ОПЕРАЦИЈЕ

- Стицање знања и формирање умења ученика је резултат низа мисаоних активности: анализе, синтезе, упоређивања, апстракције, генерализације.
  - Развијање способности ученика за примену ових мисаоних операција значајно је како за усвајање математичких садржаја, тако и за интелектуални развој деце.
- 1. **Анализа** – мисаоно разлагање целионе на њене саставне делове ради упознавања њених делова и њихових међусобних односа
  - Има широку примену у свим фазама наставног рада.
  - Облици:
    - Анализа типа “филтер” при којој се појам рашчлањује на саставне делове без одређеног унапред утврђеног реда.
    - Анализа преко синтезе - успостављање веза и односа међу особинама изучаваног објекта.

**Пример:** Анализом квадрата одваја се страница као његов елемент. Анализира се релација између страница и утврђује да су све странице једнаке међу собом. На основу тога, успоставља се веза која је значајна за извођење формула за обим и површину квадрата:

- квадрат је многоугао са четири странице – четвороугао,
- све четири странице су међусобно једнаке,
- све странице квадрата могу се означити једним истим словом –  $a$ ,
- обим квадрата је збир дужина свих његових страница и  $O = a + a + a + a$ , тј.  $O = 4a$ .

# МИСАОНЕ ОПЕРАЦИЈЕ

**2. Синтеза** – мисаона операција сједињавања изучених елемената математичког појма, процеса, појаве у једну интегралну целину.

**Пример:** Одредити број који је збир петсто хиљада, деведесет хиљада, две хиљаде, три стотине, седамдесет и шест.

- Синтетички приступ доприноси да се, осим схватања саставних делова као интегралне целине, сагледају и њихове битне особине и релације међу њима.
- Анализа и синтеза су неодвојиве и образују аналитичко-синтетички приступ, који има широку примену, нарочито при решавању сложених текстуалних задатака.

**Пример:** Збир четири броја је 1000. Први број је 150, други је два пута већи од њега, а трећи је збир првог и другог. Одредити четврти број.

# МИСАОНЕ ОПЕРАЦИЈЕ

## 3. Упоређивање

- Мисаона операција одређивања сродности и различитости проучаваних објеката.
- Упоређивањем математичких објеката утврђујемо:
  - Колико је нови појам сродан са раније уведеним појмом,
  - Колико се нови појам разликује од раније уведених појмова,
  - Које су везе између елемената новог и раније уведених појмова.

Пример: Упоређивањем квадрата по питању углова и страница са осталим четвороугловима и посебно са правоугаонцима, ученици могу да дефинишу појам квадрата као:

- четвороугао чији су сви углови прави и све странице међусобно једнаке,
  - правоугаоник са једнаким страницама.
- Правила упоређивања:
    1. Упоређују се само математички појмови између којих постоји веза – има смисла упоређивати истородне величине.
    2. Изводи се плански – јасно се издвајају оне особине које се упоређују.
    3. Упоређивање истородних величина треба да буде целовито – да се изведе до краја.

# МИСАОНЕ ОПЕРАЦИЈЕ

## 4. Апстракција

- Издајање (задржавање) битних и изостављање небитних особина – задржавају се само оне које чине садржај математичког појма.

**Пример:** При обради комутативности сабирања природних бројева одбацујемо број цифара, однос по величини и редослед сабирака; задржавамо податак да се збир не мења.

- Успешност апстрактног схватања зависи од тога колико су успешно спроведене анализа, синтеза и упоређивање, на којима се заснива апстракција.

# МИСАОНЕ ОПЕРАЦИЈЕ

## 5. Генерализација

- Уопштавање на основу сазнања из низа појединих случајева.
- Повезана је са низом мисаоних операција:
  - Анализирање појединачних случајева,
  - Идентификовање и издвајање релевантних особина појма који се проучава,
  - Синтеза заједничких битних особина у једну целину,
  - Дефинисање изведене генерализације.

Пример:           Размотрити генерализацију формуле за површину правоугаоника.

- 6. **Идентификација** – мисаоно поистовећивање свих посматраних објеката са задржаним карактеристичним својствима.
- 7. **Конкретизација** – усвајање сложенијих апстрактних структура уз посматрање и манипулисање конкретним моделима.
- 8. **Специјализација** – преношење својстава која важе за шири скуп појмова на неки његов подскуп.

# МИСАОНЕ ОПЕРАЦИЈЕ



# УТИЦАЈ ТЕОРИЈА РАЗВОЈА МИШЉЕЊА НА ОРГАНИЗАЦИЈУ ПНМ

- ЛИТЕРАТУРА
- КОМПЕТЕНЦИЈЕ НАСТАВНИКА ЗА ПОЧЕТНУ НАСТАВУ МАТЕМАТИКЕ
- Ибро Ваит, Еуген Љајко
- Учитељски факултет Лепосавић, 2018
  
- Странице 59-83 (обратити пажњу на примере!!!!)
  
- Консултације сваке вечери од 22,00 до 23,30 на мејл:
- [branislav.randjelovic@pr.ac.rs](mailto:branislav.randjelovic@pr.ac.rs)