Непрекидност функције

Дефиниција 0.1. *Функција* $f : D \to \mathbb{R}$ *је* ***непрекидна*** *у тачки* $x_0 \in D$ *ако је*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1}$$

Тачка у којој није испуњен бар један од услова

1) да постоји $\lim_{x \to x_0} f(x)$ и

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,

назива се **тачка прекида** функције f.

Ако је x_0 тачка прекида функције $f : D \to \mathbb{R}$ и ако постоје коначне граничне вредности

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \text{ и } \lim_{x \to x_0-0} f(x),$$

онда тачку x_0 називамо **тачка прекида прве врсте**. Број

$$|\lim_{x \to x_0+0} f(x) - \lim_{x \to x_0-0} f(x)|,$$

називамо **скок функције** f у тачки x_0.

Тачку прекида x_0 функције $f : D \to \mathbb{R}$ називамо **тачка прекида друге врсте** ако бар једна од граничних вредности

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \text{ и } \lim_{x \to x_0-0} f(x),$$

не постоји или је једнака $+\infty$ или $-\infty$.

Дефиниција 0.2. *Функција* $f : D \to \mathbb{R}$ *је* ***непрекидна слева*** *у тачки* $x_0 \in D$ *ако је*

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0),$$

а ***непрекидна здесна*** *у ако је*

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Дефиниција 0.3. *Нека је дата функција* $f : D \to \mathbb{R}$ *и нека су* $x_0, x_1 \in D$. *Разлику* $x_1 - x_0 = \triangle x$ *називамо* ***прираштај независно промењиве***, *а разлику одговарајућих вредности функције,* $f(x_1) - f(x_0)$, *називамо* ***прираштај функције***. *Како је* $x_1 = x_0 + \triangle x$, *то је* $f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$, *што означавамо са:*

$$\triangle f(x_0; \triangle x) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0).$$

Непрекидност функције можемо дефинисати и на следећи начин:

Дефиниција 0.4. *Функција* $f : D \to \mathbb{R}$ *непрекидна је у тачки* $x_0 \in D$ *ако је*

$$\lim_{\triangle x \to 0} \triangle f(x_0; \triangle x) = 0.$$

Последњи услов значи да је функција f непрекидна у тачки ако "бесконачно малој промени оригинала одговара бесконачно мала промена слике".

Дефиниција 0.5. *Функција* $f : D \to \mathbb{R}$ *је* ***непрекидна на скупу*** D *ако је непрекидна у свакој тачки скупа* D.

0.1. Испитати да ли је функција

1) $f(x) = x^2 - 1$ непрекидна у тачки $x_0 = 3$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ непрекидна у тачки $x_0 = 2$;

3) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ x-2, & x > 2 \end{cases}$ непрекидна у тачки $x_0 = 2$.

Решење.

1) Како је

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x^2 - 1) = 9 - 1 = 8,$$

и $f(3) = 9 - 1 = 8$ закључујемо да је функција $f(x)$ непрекидна у тачки $x_0 = 3$.

2) Функција $f(x)$ није непрекидна у тачки $x_0 = 2$ јер није дефинисана у тој тачки, па није испуњен услов $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. То није тачка прекида јер x_0 није тачка која припада домену функције D.

3) Лева и десна гранична вредност функције постоје:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2-0} f(x) &= \lim_{x\to 2-0} x^2 = 2^2 = 4,\\
\lim_{x\to 2+0} f(x) &= \lim_{x\to 2+0} (x-2) = 2-2 = 0,
\end{aligned}$$

али оне нису међусобно једнаке па не постоји $\lim_{x\to 2} f(x)$. Дакле, $x_0 = 2$ је тачка прекида.

0.2. Одредити врсту прекида функција:

$$1)\ \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0\\ 1, & x = 0 \end{cases};$$

$$2)\ \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}, & x \neq 0\\ 0, & x = 0 \end{cases};$$

$$3)\ \ f(x) = \begin{cases} 2^{\dfrac{1}{x-1}}, & x \neq 1\\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

Решење.

1) Како тачка $0 \in D$, где је D домен функције и

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \frac{x}{|x|} &= \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0+} 1 = 1,\\
\lim_{x\to 0-} \frac{x}{|x|} &= \lim_{x\to 0-} -\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0+} (-1) = -1,
\end{aligned}$$

следи да $f(x)$ у тачки $x_0 = 0$ има прекид прве врсте, а скок је 2.

2) Како $1 \in D$ и

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1+0} f(x) &= \lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \infty,\\
\lim_{x\to 1-0} f(x) &= \lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 0,
\end{aligned}$$

следи да функција $f(x)$ у тачки $x_0 = 1$ има прекид друге врсте.

3) Функција $f(x)$ је дефинисана на интервалу $D = [-1, 0) \cup (0, 1]$. На том интервалу функција је и непрекидна. Наиме, $f(0) = 0$, док је:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{1-1+x^2} = 2, \\
\lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0-} \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0-} \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0-} \frac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{1-1+x^2} = 2,
\end{aligned}$$

па закључујемо да је $x_0 = 0$ тачка прекида прве врсте, а скок је 2.

0.3. Доказати да је функција $f(x) = x^3$ непрекидна на целом скупу реалних бројева $\mathbb{R}$.

Решење. Функција $f(x) = x^3$ дефинисана је на целом скупу $\mathbb{R}$ и за $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ је:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x^3 = x_0^3 = f(x_0).$$

0.4. Испитати непрекидност функције:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x^2}-1}{2x}, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases} .$$

Решење. Функција $f(x)$ дефинисана је на скупу $(0, 1]$. Њена непрекидност следи из непрекидности функције $y = \dfrac{e^{3x^2}-1}{2x}$ на интервалу $(-\infty, 0)$ $\cup\, (0, +\infty)$. Што се тиче непрекидности здесна у тачки $x = 0$, на основу тога што је $f(0) = 1$ и

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0+} f(x) &= \lim_{x\to 0+} \frac{e^{3x^2}-1}{2x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{3x^2}-1}{3x^2} \cdot \frac{3x^2}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{e^{3x^2}-1}{3x^2} \cdot \lim_{x\to 0+} \frac{3x^2}{2x} = 1 \cdot 0 = 0,
\end{aligned}$$

закључујемо да функција има прекид у тачки $x_0 = 0$. Дакле, на $[0, 1]$ функција није непрекидна.