Интервали монотоности и екстремуми функција

ТЕОРЕМА 0.1. *(Потребан и довољан услов за монотоност) Функција $f(x)$ диференцијабилна у отвореном интервалу (a,b) је растућа (опадајућа) у том интервалу ако и само ако је тачан исказ*

$$\forall x \in (a,b) \quad f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0).$$

Ако је функција $f(x)$ непрекидна на сегменту $[a,b]$ онда функција на том интервалу постиже и најмању и највећу вредност, које називамо ***апсолутним минимумом*** и ***апсолутним максимумом***. Међутим, ако функција $f(x)$ није непрекидна на $[a,b]$ или се функција $f(x)$ разматра на скупу који није сегмент, тада функција не мора постизати ни апсолутни максимум ни апсолутни минимум. Тада функција постиже најмању, односно највећу вредност у њиховим довољно уским околинама и зато се називају тачкама ***локалних минимума***, односно ***максимума***.

ДЕФИНИЦИЈА 0.1. *Тачка x_0 је тачка* ***локалног минимума (максимума)*** *ако је $f(x)$ дефинисана у околини x_0 и постоји $\delta > 0$ такво да је*

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)),$$

за свако $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

У тачки x_1 је локални максимум $f(x)$, а у тачки x_4 њен локални минимум, а важи $f(x_4) > f(x_1)$. Зато се локални екстремуми називају и ***релативним*** екстремумима.

ТЕОРЕМА 0.2. *(Потребан и довољан услов за локални екстремум) Ако је x_0 тачка локалног екстремума непрекидне функције $f(x)$, онда важи:*

(1) $$f'(x_0) = 0 \;\vee\; f'(x_0) \text{ не постоји.}$$

Тачка x_0 у којој важи услов (1) назива се ***критичном тачком*** функције $f(x)$. Непрекидна функција може имати локални екстремум само у својој критичној тачки.

ТЕОРЕМА 0.3. *(Довољан услов за локални екстремум) Нека је функција $f(x)$ диференцијабилна у некој околини тачке x_0, осим можда у самој тачки x_0, при чему извод $f'(x)$ мења знак у тачки x_0. Тада је x_0 тачка строгог локалног екстремума, и то минимума ако се знак мења са "-" на "+", а максимума ако је обрнуто.*

Тачке у којима је извод неке функције једнак нули обично се називају њеним ***стационарним тачкама***. Критичне тачке у којима извод не постоји називају се и ***сингуларне тачке***.

Конвексност и превојне тачке графика функције

Теорема 0.4. *(Потребан и довољан услов за конвексност) Ако је функција $f(x)$ двапут диференцијабилна , тј. има други извод $f''(x)$ за свако $x \in (a, b)$, онда је график функције $f(x)$ конвексан на доле (на горе) у интервалу (a, b) ако и само ако важи услов*

$$\forall x \in (a, b) \quad f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0).$$

Теорема 0.5. *Тачка P на графику функције f са апсцисом x_0 је **превојна тачка** графика функције f ако постоји тангента t у тачки P и постоје лева и десна околина тачке x_0 у којима је конвексност функције f различитог карактера.*

То значи да је у интервалу (c, x_0) график функције f конвексан на горе, а у интервалу (x_0, d) конвексан на доле.

Теорема 0.6. *Нека је функција f двапут диференцијабилна у околини тачке x_0, осим можда у самој тачки x_0 и нека је x_0 апсциса превојне тачке P графика функције f. Тада важи услов:*

$$f''(x_0) = 0 \ \vee \ (x_0 \text{ је тачка прекида } f''(x)). \tag{2}$$

Теорема 0.7. *Нека постоји (коначан или бесконачан) $f'(x_0)$ и нека важи услов (2). Тада из промене знака $f''(x)$ у тачки x_0 (тј. из егзистенције $\delta > 0$ таквог да је $f''(x) > 0$ за $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f''(x) < 0$ за $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, или обрнуто) следи да је x_0 апсциса превојне тачке графика функције $f(x)$.*

0.1. За функцију $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ одредити екстремне вредности.

Решење.

Стационарне тачке су нуле првог извода (а то су потенцијалне екстремне тачке):

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}\right)' = \frac{(x+1)'(\sqrt{x^2-4})-(x+1)(\sqrt{x^2-4})'}{x^2-4} \\
&= \frac{\sqrt{x^2-4}-(x+1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-4}}(x^2-4)'}{x^2-4} = \frac{\sqrt{x^2-4}-\dfrac{x(x+1)}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} \\
&= \frac{\dfrac{x^2-4-x^2-x}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{-(x+4)}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}.
\end{aligned}
$$

Изједначавајући први извод са нулом, добијамо да је $x = -4$ и то је стационарна тачка. С обзиром да се знак првог извода у околини те тачке мења и то из $+$ у $-$, закључујемо да је та тачка екстремна и да је максимум.

0.2. Испитати монотоност, конвексност и конкавност функције

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x.$$

Решење. Монотоност функције и екстремне вредности:

Након израчунавања добијамо да је први извод функције:

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right)' = x^2 - 2x - 3.$$

Стационарне тачке су нуле првог извода па је

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 = -1.$$

Монотоност функције, као и природу стационарних тачака испитујемо помоћу табеле:

	$(-\infty,-1)$	$x=-1$	$(-1,3)$	$x=3$	$(3,+\infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

На основу табеле закључујемо да је функција растућа за $x \in (-\infty,-1)$ $\cup(3,+\infty)$, опадајућа за $x \in (-1,3)$, а како се знак извода у околини тачке

$x = -1$ мења из "+" у "-", онда је тачка $M_1 = \left(-1, \dfrac{5}{3}\right)$ тачка локалног максимума. Знак извода се у околини тачке $x = 3$ мења из "-" у "+", па је $M_2 = (3, -9)$ тачка локалног минимума.

Конвексност и превојне тачке:

Након израчунавања добијамо да је други извод функције облика:

$$y'' = \left(x^2 - 2x - 3\right)' = 2x - 2,$$

а нула другог извода је у тачки $x = 1$. Да би испитали конвексности и да ли је $x = 1$ заиста превојна тачка одређујемо знак другог извода. Знак се мења само у тачки 1:

	$(-\infty, 1)$	$x = 1$	$(1, \infty)$
$x - 1$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Знак другог извода се мења у околини тачке $x = 1$, па закључујемо да је $P\left(1, -\dfrac{11}{3}\right)$ превојна тачка. Такође, функција је конвексна на доле за свако $x \in (-\infty, 1)$ а конвексна на горе за свако $x \in (1, +\infty)$.

0.3. Испитати монотоност, конвексност и конкавност функције

$$y = x^4 - 4x^2 + 3.$$

Решење. Монотоност функције и екстремне вредности:

Након израчунавања добијамо да је први извод функције:

$$y' = (x^4 - 4x^2 + 3)' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2).$$

Стационарне тачке су нуле првог извода па је

$$\begin{aligned} y' = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow 4x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \wedge x_2 = \sqrt{2} \wedge x_3 = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Монотоност функције, као и природу стационарних тачака испитујемо помоћу табеле:

		$x = -\sqrt{2}$		$x = 0$		$x = \sqrt{2}$	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x + \sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x - \sqrt{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

На основу табеле закључујемо да је функција растућа за $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, опадајућа за $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$, а како се знак извода у околини тачке $x = 0$ мења из "+" у "-", онда је тачка $M_1 = (0, 3)$ тачка локалног максимума. Знак извода се у околини тачака $x = -\sqrt{2} \wedge x = \sqrt{2}$ мења из "-" у "+", па су $M_2 = (-\sqrt{2}, -1), M_3 = (\sqrt{2}, -1)$ тачке локалног минимума.

Конвексност и превојне тачке:

Након израчунавања добијамо да је други извод функције облика:

$$y'' = (4x^3 - 8x)' = 12x^2 - 8 = 4(3x^2 - 2).$$

Превојне тачке су нуле другог извода:

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Да би испитали конвексност и да ли су $x_{1,2} = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ заиста превојне тачке одређујемо знак другог извода. Нека је $a = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$,тада имамо

	$(0, a)$	$x = a$	$(a, +\infty)$
$x - a$	$-$	0	$+$
$x + a$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Знак другог извода се мења у околини тачке $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$, па закључујемо да је $P_1\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$ превојна тачка. Такође, функција је конвексна на доле за свако $x \in \left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}, +\infty\right)$ а конвексна на горе за свако $x \in \left(0, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$. Симетрично се понаша и на негативном делу x-осе, па је и $P_2\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$ такође превојна тачка.