Извод сложене и инверзне функције

Ако су дате две функције $y = g(u), \ \ u = f(x)$, онда се може дефинисати извод сложене функције $y = g(f(x))$.

Теорема 0.1. *Ако функција f има извод у тачки x, тј. постоји $f'(x)$, и функција g има извод у тачки $u = f(x)$, тј. постоји $g'(f(x))$, онда постоји и извод сложене функције y у тачки x и при томе важи једнакост:*

$$y' = \left(g(f)\right)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Претходна формула може се и једноставније означавати са:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Пример 0.1. *Наћи извод функције $y = \sqrt{x^2+1}$.*

Решење. Према формули за налажење извода сложене функције је, ако је $u = x^2+1$: $y_u = \sqrt{u}, u_x = x^2+1$. Тада је

$$y'_u = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \ \ u'_x = 2x,$$

па је извод:

$$y' = \left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}.$$

Пример 0.2. *Наћи извод функције $y = \ln\sqrt{3x-2}$.*

Решење. Према формули за налажење извода сложене функције, ако је $v = \sqrt{3x-2}, u = 3x-2$ добијамо: $y = \ln v, v_u = \sqrt{u}, u_x = 3x-2$. Тада је

$$y'_v = \frac{1}{v}, \ \ v'_u = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \ \ u'_x = 3,$$

па је извод:

$$y' = \left(\ln\sqrt{3x-2}\right)' = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 3 = \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 3 = \frac{3}{2u} = \frac{3}{2(3x-2)}.$$

Виши изводи функције

Извод $y' = f'(x)$ неке функције $y = f(x)$ и сам је једна функција од независне промењиве x, чија је област дефинисаности скуп:

$$A_1 = \{x|(x \in \mathcal{D}(f)) \wedge (\exists f'(x))\}.$$

Ако $x \in A_1$, може се говорити о изводу извода f' у тачки x, у ознаци $(y')' = (f')'(x)$, који се назива **другим изводом** (или **изводом другог реда**) функције f и означава са $y'' = f''(x)$, при чему се y'' чита као "ипсилон секундум", а $f''(x)$ као "еф секундум од x".

На исти начин се долази и до појма трећег извода, тј.

Дефиниција 0.1. *Ако за неко $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ постоји $(n-1)$-ви извод функције f, у ознаци $f^{(n-1)}$, у некој околини тачке x, онда се извод функције $f^{(n-1)}$ у тачки x, у ознаци $(f^{(n-1)})'(x)$, назива **n-тим изводом** (или **изводом n-тог реда**) функције f у тачки x и означава са $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$.*

Изводи $f''(x), f'''(x), \dots$ се називају **вишим изводима** (или **изводи вишег реда**) функције f у тачки x.

Уколико постоје изводи $f^{(n)}(x)$ и $g^{(n)}(x)$ тада постоји и $[f(x) \pm g(x)]^{(n)}$ и тада важи формула која представља уопштење правила за извод збира и разлике две функције

$$[f(x) \pm g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x).$$

Што се тиче n-тог извода производа две функције $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ имамо да је

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v'' + \dots \\ &+ \binom{n}{n-1} u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}, \end{aligned}$$

односно у сажетом облику формула:

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)}v^{(k)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Последња формула назива се **Лајбницова формула** а при том имамо да важи:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!},$$

где је $(n = 0, 1 \ldots, k = 0, 1, \ldots, n)$.

Диференцијал функције

За функцију f која има извод у тачки x каже се и да је диференцијабилна у тачки x.

ДЕФИНИЦИЈА 0.2. *Функција f дефинисана у околини тачке x назива се* ***диференцијабилном у тачки*** *x ако се њен прираштај $\triangle f(x; \triangle x)$ у тој тачки (који одговара прираштају $\triangle x$ независне променљиве) може представити у облику*

$$\triangle f(x; \triangle x) = A\triangle x + \epsilon(\triangle x)\triangle x, \tag{1}$$

где је A нека (реална) константа у односу на $\triangle x$ и $\epsilon(\triangle x)$-бесконачно мала када $\triangle x \to 0$, тј. важи

$$\lim_{\triangle x \to 0} \epsilon(\triangle x) = 0. \tag{2}$$

Следећа теорема показује да је заиста својство диференцијабилности функције у тачки еквивалентно својству постојања извода у тој тачки.

ТЕОРЕМА 0.2. *Да би функција f била диференцијабилна у тачки x потребно је и довољно да функција f има (коначан) извод у тачки x; при томе за константу A из претходне дефиниције важи $A = f'(x)$.*

На основу тога што је својство диференцијабилности функције у некој тачки еквивалентно својству постојања њеног извода у тој тачки, поступак налажења извода функције се и назива ***диференцирањем***.

ДЕФИНИЦИЈА 0.3. *Ако је функција f диференцијабилна у тачки x, тј. важи разлагање (1) са константом A и бесконачно малом $\epsilon(\triangle x)$, онда се део $A\triangle x$ назива* ***диференцијалом функције*** *f у тачки x и означава са $df(x)$ (или dy).*

Диференцијал функције се може записати и у облику

$$dy = y'dx, \quad df(x) = f'(x)dx. \tag{3}$$

Из формуле (3) извод функције у некој тачки једнак је количнику диференцијала те функције у истој тачки и диференцијала независне промењливе:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Користећи формулу (3) лако се види да се аритметичка правила за налажење извода преносе и на диференцијале.

Диференцијали виших редова

За ознаке диференцијала функције $y = f(x)$ и диференцијала независно промењиве x поред коришћених dy и dx , користићемо и δy и δx. Претпоставимо да је функција $y = f(x)$ диференцијабилна на размаку (a, b). Тада њен диференцијал $dy = f'(x)dx$ зависи и од x и од dx. Ако узмемо да је вредност dx константна, онда је dy функција само од x, па има смисла говорити о диференцијалу диференцијала dy, у ознаци $\delta(dy) = \delta(f'(x)dx)$. Тада је по формули (3)

$$\delta[f'(x)dx] = [f'(x)dx]\delta x = f''(x)dx\delta x.$$

На том поновљеном диференцијалу заснован је појам другог диференцијала (или диференцијала другог реда) d^2y. Затим се аналогним поступком уводи појам трећег, четвртог, и уопште n-тог диференцијала.

Дефиниција 0.4. *Вредност $\delta(dy)$ за $\delta x = dx$, тј. $f''(x)(dx)^2$, назива се* ***другим диференцијалом*** *функције $y = f(x)$ и означава са d^2y.*

Дакле, имамо да је

$$d^2y = f''(x)dx^2,\ \ d^3y = f'''(x)dx^3,\ \dots,\ \ d^ny = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Примена извода и диференцијала

Појам извода настао је као резултат вишевековних настојања да се реше задаци као што су: задатак о израчунавању брзине при неравномерном кретању и задатак о конструкцији тангенте криве линије.

Геометријска интерпретација извода функције

Нека је функција $y = f(x)$ непрекидна на размаку (a, b) и нека тачка M на графику те функције одговара вредности x независне промењиве, а тачка P вредности $x + \triangle x$. Тада је права MP сечица графика посматране функције. Означимо са β угао између сечице s и апсцисне осе. Јасно је да тај угао зависи од положаја тачке P, односно од вредности $\triangle x$.

Ако постоји $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \beta = \alpha$, онда се права t која пролази кроз тачку $M(x, f(x))$ и има коефицијент правца $k = \operatorname{tg}\alpha$ назива граничним положајем сечице MP кад $\triangle x \to 0$.

Дефиниција 0.5. ***Танīенша*** *t на īрафик функције $y = f(x)$ у шачки M је īранични положај сечице MP кад $\triangle x \to 0$ ако исши положај посшоји. Тачка M се при шом назива* ***шачка додира*** *шанīенше t и īрафика функције $y = f(x)$.*

Нормала n на график функције $y = f(x)$ у тачки M је права која пролази кроз тачку M и нормална је на тангенту t графика функције $y = f(x)$ у тачки M.

Теорема 0.3. *Ако посшоји (коначан или бесконачан) извод $f'(x)$, онда īрафик функције f има шанīеншу t и нормалу n у шачки M са апсцисом x, са једначинама:*

$$\begin{aligned} t &: \quad Y - y = y'(X - x), \\ n &: \quad Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x), \end{aligned}$$

īде су X, Y шакозване ***шекуће координаше****.*

У случају $f'(x) = \infty$ једначина тангенте t је у ствари $X = x$, а једначина нормале n гласи $Y = f(x)$. У случају када је $f'(x) = 0$ имамо $t : Y = f(x)$ и $n : X = x$.

Такође важи да је

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha,$$

односно $f'(x)$ је коефицијент правца тангенте t, што и представља геометријску интерпретацију извода функције.

Основне теореме диференцијалног рачуна

Претпоставимо да је функција $f(x)$ непрекидна на сегменту $[a, b]$, диференцијабилна унутар тог сегмента и да је $f(a) = f(b)$.

Теорема 0.4. [Ролова] *Ако је функција $f(x)$ непрекидна на сеīменшу $[a, b]$, диференцијабилна на ошвореном иншервалу (a, b) и важи $f(a) = f(b)$, онда посшоји шачка c у ошвореном иншервалу (a, b) шаква да је $f'(c) = 0$.*

Геометријски, ако функција испуњава услове Ролове теореме на сегменту $[a, b]$, онда постоји бар једна унутрашња тачка M на графику $f(x)$ у којој је тангента t паралелна апсцисној оси.

Теорема 0.5. [Лагранжова] *Ако је функција* $f(x)$ *непрекидна на сегменту* $[a,b]$ *и диференцијабилна унутар њега, тј. за* $x \in (a,b)$*, онда постоји тачка* $c \in (a,b)$ *таква да је*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Геометријски, Лагранжова теорема значи да постоји бар једна унутрашња тачка M на посматраном делу графика $f(x)$ у којој је тангента паралелна сечици кроз његове крајње тачке. Лагранжова теорема је једно уопштење Роловe теореме.

Теорема 0.6. [Кошијева] *Ако су функције* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрекидне на сегменту* $[a,b]$*, диференцијабилне на интервалу* (a,b) *и важи* $g'(x) \neq 0$ *за свако* $x \in (a,b)$*, онда постоји тачка* $c \in (a,b)$ *таква да је тачна Кошијева формула*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Такође је Кошијева теорема уопштење Лагранжове, а самим тим и Ролове теореме.

Лопиталово правило

1) Неодређени изрази облика $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Ако су функције $f_1(x)$ и $f_2(x)$ бесконачно мале или бесконачно велике за $x \to a$, тј. ако је $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ када $x \to a$ неодређен израз облика $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, тада је

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)},$$

(ако постоји гранична вредност на десној страни). Правило важи и када је $a = \infty$.

Може постојати $\lim\limits_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, а да не постоји $\lim\limits_{x \to a} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$.

2) Неодређени изрази облика $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$

Ако је $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty$ онда производ $f_1(x)\cdot f_2(x)$ треба написати у облику $\dfrac{f_1(x)}{\dfrac{1}{f_2(x)}}$, $\left(\text{тип } \dfrac{0}{0}\right)$ или $\dfrac{f_2(x)}{\dfrac{1}{f_1(x)}}$, $\left(\text{тип } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$ па се гранична вредност тражи као у петходном случају.

У случају $\infty - \infty$, треба израз $f_1(x) - f_2(x)$ трансформисати у облик $f_1(x)\left(1 - \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)}\right)$. Ако је $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1$, тада је неодређеност сведена на претходни случај.

3) Неодрећени изрази облика $1^{\infty}, 0^0$ и ∞^0

Ови неодређени изрази се израчунавају претходним логаритмовањем израза $[f_1(x)]^{f_2(x)}$, којим се своде на облик $0\cdot\infty$.