Глава 1

Извод и диференцијал реалне функције реалне променљиве

1.1 Преглед дефиниција и теорема

Извод функције и његова својства

Дефиниција 1.1. *Ако је функција f непрекидна у тачки $x \in (a,b)$ и ако постоји гранична вредност:*

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x; \triangle x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}, \tag{1.1}$$

онда се каже да функција $f(x)$ у тачки x има ***први извод****.*

Често се за означавање првог извода користи и Лајбницова ознака помоћу диференцијала:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

(чита се де y по де x).

Пример 1.1. *Наћи први извод функције $y = x^2$.*

Решење. Према дефиницији извода (1.1) имамо:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{(x+\triangle x)^2-x^2}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{x^2+2x\triangle x+(\triangle x)^2-x^2}{\triangle x}\\ &= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle x(2x+\triangle x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}(2x+\triangle x) = 2x. \end{aligned}$$

Пример 1.2. *За функцију $f(x)=\sqrt{x}$ наћи први извод, а затим и $f'(4)$.*

Решење. Према дефиницији извода (1.1) имамо:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\sqrt{x+\triangle x}-\sqrt{x}}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\sqrt{x+\triangle x}-\sqrt{x}}{\triangle x}\cdot\frac{\sqrt{x+\triangle x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\triangle x}+\sqrt{x}}\\ &= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{x+\triangle x-x}{\triangle x(\sqrt{x+\triangle x}+\sqrt{x})} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{1}{\triangle x(\sqrt{x+\triangle x}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Сада је $f'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$.

Укажимо на везу између диференцијабилности (када функција има извод у датој тачки) и непрекидности функције.

Теорема 1.1. *Ако је функција диференцијабилна у тачки x, она је непрекидна у тој тачки. Обрнуто тврђење не мора бити тачно, ако је функција непрекидна у тачки x, не мора да има извод у тој тачки.*

Дефиниција 1.2. *Ако је функција f непрекидна у тачки $x\in(a,b)$ и важи:*

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle f(x;\triangle x)}{\triangle x}\left(=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}\right)=\pm\infty$$

онда се каже да функција f у тачки x има ***бесконачан извод****.*

Изводи неких основних елементарних функција

Пример 1.3. *Наћи извод функције f у произвољној тачки $x\in(-\infty,+\infty)$ ако је*

$$f(x)=c,\quad (c\in\mathbb{R}-\text{фиксирано}).$$

Решење. По дефиницији за произвољно $x \in (-\infty, +\infty)$ имамо

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{c-c}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{0}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} 0 = 0.$$

ПРИМЕР 1.4. *Наћи по дефиницији извод функције f у произвољној тачки $x \in (-\infty, +\infty)$ ако је*

$$f(x) = e^x.$$

Решење. Имамо да је

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{e^{x+\triangle x} - e^x}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{e^x(e^{\triangle x} - 1)}{\triangle x} \\ &= e^x \lim_{\triangle x \to 0} \frac{e^{\triangle x} - 1}{\triangle x} = e^x. \end{aligned}$$

(При томе је коришћена позната гранична вредност $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1$.)

На сличан начин налазимо изводе и осталих елементарних функција.

ТЕОРЕМА 1.2. *Ако постоје изводи $f'(x)$ и $g'(x)$, онда постоје и изводи $(f \pm g)'(x)$ и $(\cdot g)'(x)$, и важе једнакости:*

$$\begin{aligned} (f \pm g)' &= f'(x) \pm g'(x), \\ (f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \end{aligned}$$

и ако је још $g(x) \neq 0$, тада постоји и $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)$, и важи једнакост:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

1.2 Задаци

Одредити први извод следећих сложених функција:

1.1. $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$.

Решење.

$$\begin{aligned} y' &= \left((x-1)\sqrt[3]{x^2}\right)' = \sqrt[3]{x^2} + (x-1)(x^{\frac{2}{3}})' = \sqrt[3]{x^2} + (x-1)\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{x^2} + (x-1)\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3x^2 + 2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}. \end{aligned}$$

1.2. $y = x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

Решење.

$$\begin{aligned} y' &= \left(x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \frac{x}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x}\right)' = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{x}{\frac{x^2+1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}. \end{aligned}$$

1.3. $y = \operatorname{arctg}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

Решење.

$$\begin{aligned} y' &= \left[\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]' = \frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(1+\frac{1}{x}\right)' \\ &= \left(1+\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+(x+1)^2} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) \\ &= \frac{-1}{x^2+x^2+2x+1} = \frac{-1}{2x^2+2x+1}. \end{aligned}$$

1.4. $y = \ln \dfrac{(x-1)^3(x-2)}{x-3}$.

Решење.

$$\begin{aligned} y' &= \left(y = \ln \frac{(x-1)^3(x-2)}{x-3}\right)' \\ &= \frac{1}{\frac{(x-1)^3(x-2)}{x-3}} \cdot \frac{((x-1)^3(x-2))'(x-3) - (x-1)^3(x-2)(x-3)'}{(x-3)^2} \\ &= \frac{x-3}{(x-1)^3(x-2)} \cdot \frac{(((x-1)^3)'(x-2) - (x-1)^3(x-2)')(x-3) - (x-1)^3(x-2)}{(x-3)^2} \\ &= \frac{1}{(x-1)^3(x-2)} \cdot \frac{3(x-1)^2(x-2)(x-3) - (x-1)^3(x-3) - (x-1)^3(x-2)}{x-3} \\ &= \frac{(x-1)^2}{(x-1)^3(x-2)} \cdot \frac{x^2-8x+13}{x-3} = \frac{x^2-8x+13}{(x-1)(x-2)(x-3)}. \end{aligned}$$

1.5. $y = \sqrt{4x-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
y' &= \left[\sqrt{4x-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{4x-1}}(4x-1)' \\
&- \frac{1}{1+(\sqrt{4x-1})^2}(\sqrt{4x-1})' = \frac{1}{2\sqrt{4x-1}}\cdot 4 \\
&- \frac{1}{1+4x-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{4x-1}}(4x-1)' = \frac{2}{\sqrt{4x-1}} - \frac{1}{8x\sqrt{4x-1}}\cdot 4 \\
&= \frac{2}{\sqrt{4x-1}} - \frac{1}{2x\sqrt{4x-1}} = \frac{4x-1}{2x\sqrt{4x-1}} = \frac{\sqrt{4x-1}}{2x}.
\end{aligned}
$$

1.6. $y = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' - \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1+x)'(1-x)-(1+x)(1-x)'}{(1-x)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{(1+x)(1-x)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1+x^2-(1-x^2)}{2(1-x^4)} = \frac{x^2}{1-x^4}.
\end{aligned}
$$

1.7. $y = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+3}} - \frac{\sqrt{2x+3}}{x}$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+3}} - \frac{\sqrt{2x+3}}{x}\right)' = \frac{-(x+\sqrt{x^2+3})'}{(x+\sqrt{x^2+3})^2} \\
&- \frac{(\sqrt{2x+3})'x - \sqrt{2x+3}}{x^2} = \frac{-1-\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{(x+\sqrt{x^2+3})} - \frac{\frac{x}{\sqrt{2x+3}} - \sqrt{2x+3}}{x^2} \\
&= \frac{-\sqrt{x^2+3}-x}{(x+\sqrt{x^2+3})\sqrt{x^2+3}} + \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}.
\end{aligned}
$$

1.8. $y = x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
y' &= \left(x \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}\right)' \\
&= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + x\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x\right) - \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}2x \\
&= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \frac{x}{x + \sqrt{1+x^2}}\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).
\end{aligned}$$

1.9. $y = \sqrt{x^2+1} + \ln\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\sqrt{x^2+1} + \ln\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}\right)' \\
&= \frac{1}{2x\sqrt{x^2+1}}2x + \frac{1}{\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}}\frac{(1-\sqrt{x^2+1})'x - x'(1-\sqrt{x^2+1})}{x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{1-\sqrt{x^2+1}}\frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x^2 - (1-\sqrt{x^2+1})}{x^2} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - 1 + \sqrt{x^2+1}}{x(1-\sqrt{x^2+1})} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{-x^2 - \sqrt{x^2+1} + x^2 + 1}{x(1-\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x(1-\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.
\end{aligned}$$

1.10. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)' \\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)'}\frac{1+\sqrt{1-x^2}-x\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{(1+\sqrt{1-x^2})^2} \\
&= \frac{1}{\frac{1+2\sqrt{1-x^2}+1-x^2+x^2}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}}\frac{1+\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1+\sqrt{1-x^2})^2} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{1-x^2}+1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{2+2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

1.11. $y=\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

Решење.

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\cdot\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)' \\
&= \frac{\sqrt{1+\sin x}}{2\sqrt{1-\sin x}}\cdot\frac{(1-\sin x)'(1+\sin x)-(1-\sin x)(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2} \\
&= \frac{\sqrt{1+\sin x}}{2\sqrt{1-\sin x}}\cdot\frac{-\cos x(1+\sin x)-(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)(\sqrt{1+\sin x})^2} \\
&= \frac{\cos x(-1-\sin x-1+\sin x)}{2(1+\sin x)\cdot\sqrt{(1+\sin x)(1-\sin x)}} = \frac{-2}{2(1+\sin x)\sqrt{1-\sin^2 x}} \\
&= \frac{-1}{(1+\sin x)\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{-1}{(1+\sin x)\cdot\cos x}.
\end{aligned}$$

1.12. $y=\ln\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1-x}$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\ln\frac{x-2}{x+1}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x}\right)' = \frac{1}{\frac{x-2}{x+1}}\cdot\left(\frac{x-2}{x+1}\right)' \\
&+ \frac{(\sqrt{1+x^2})'(1-x)-\sqrt{1+x^2}(1-x)'}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x+1}{x-2}\cdot\frac{(x-2)'(x+1)-(x-2)(x+1)'}{(x+1)^2} \\
&+ \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)'(1-x)+\sqrt{1+x^2}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x+1}{x-2}\cdot\frac{x+1-(x-2)}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x(1-x)+\sqrt{1+x^2}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x+1}{x-2}\cdot\frac{x+1-x+2}{(x+1)^2}+\frac{\frac{x-x^2+1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{3}{(x-2)(x+1)}+\frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}(1-x)^2}.
\end{aligned}
$$

1.13. $y=\ln\sqrt{\dfrac{\sin 2x}{1-\sin 2x}}$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\ln\sqrt{\frac{\sin 2x}{1-\sin 2x}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin 2x}{1-\sin 2x}}}\cdot\left(\sqrt{\frac{\sin 2x}{1-\sin 2x}}\right)' \\
&= \sqrt{\frac{1-\sin 2x}{\sin 2x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{\sin 2x}{1-\sin 2x}}}\cdot\left(\frac{\sin 2x}{1-\sin 2x}\right)' \\
&= \sqrt{\frac{1-\sin 2x}{\sin 2x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1-\sin 2x}{\sin 2x}} \\
&\cdot \left(\frac{2\cos 2x(1-\sin 2x)-\sin 2x(-2\cos 2x)}{(1-\sin 2x)^2}\right) \\
&= \frac{(1-\sin 2x)(2\cos 2x - 2\cos 2x\sin 2x + 2\sin 2x\cos 2x)}{2\sin 2x(1-\sin 2x)^2} \\
&= \frac{2\cos 2x}{2\sin 2x(1-\sin 2x)} = \frac{\cos 2x}{(1-\sin 2x)\sin 2x} = \frac{\operatorname{ctg} 2x}{1-\sin 2x}.
\end{aligned}
$$

1.14. $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\ln\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)' = \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}\right)' \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)'(\sqrt{x^2+1}-x)-(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)'}{(\sqrt{x^2+1}-x)^2} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2(\sqrt{x^2+1})}\cdot 2x+1\right)(\sqrt{x^2+1}-x)-(\sqrt{x^2+1}+x)\cdot\left(\frac{1}{2(\sqrt{x^2+1})}\cdot 2x-1\right)}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)} \\
&= \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)(\sqrt{x^2+1}-x)-(\sqrt{x^2+1}+x)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1}-x)-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}(\sqrt{x^2+1}+x)(x-\sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}\\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}(2(x+\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1}-x))}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}.
\end{aligned}
$$

1.15. $y = 4\ln(\sqrt{x-4}+\sqrt{x})+\sqrt{x^2-4x}$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
y' &= \Big(4\ln(\sqrt{x-4}+\sqrt{x})+\sqrt{x^2-4x}\Big)'\\
&= \frac{4}{\sqrt{x-4}+\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x-4}+\sqrt{x})'+\frac{1}{2\sqrt{x^2-4x}}\cdot(x^2-4x)'\\
&= \frac{4}{\sqrt{x-4}+\sqrt{x}}\cdot(\frac{1}{2\sqrt{x-4}}+\frac{1}{2\sqrt{x}})+\frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}}\\
&= \frac{4}{2(\sqrt{x-4}+\sqrt{x})}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-4}}{\sqrt{x(x-4)}}+\frac{2(x-2)}{2\sqrt{x(x-4)}}\\
&= \frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{x-4})}{\sqrt{x(x-4)}\cdot(\sqrt{x-4}+\sqrt{x})}+\frac{x-2}{\sqrt{x(x-4)}}=\frac{2+x-2}{\sqrt{x(x-4)}}=\frac{x}{\sqrt{x(x-4)}}\\
&= \sqrt{\frac{x}{x-4}}.
\end{aligned}
$$

1.16. $y = \ln(\sqrt{1+e^x}-1)-\ln(\sqrt{1+e^x}+1)$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
y' &= \big(\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-\ln(\sqrt{1+e^x}+1)\big)'\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+e^x}-1}(\sqrt{1+e^x}-1)'-\frac{1}{\sqrt{1+e^x}+1}(\sqrt{1+e^x}+1)'\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+e^x}-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\cdot(1+e^x)'-\frac{1}{\sqrt{1+e^x}+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\cdot(1+e^x)'\\
&= \frac{1}{\sqrt{1+e^x}-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\cdot e^x-\frac{1}{\sqrt{1+e^x}+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\cdot e^x\\
&= \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}-1}-\frac{1}{\sqrt{1+e^x}+1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\left(\frac{\sqrt{1+e^x}+1-\sqrt{1+e^x}+1}{(\sqrt{1+e^x})^2-1}\right)\\
&= \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\left(\frac{2}{1+e^x-1}\right) = \frac{e^x}{e^x\sqrt{1+e^x}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}.
\end{aligned}
$$

1.17. $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)'\\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' - \frac{(\sqrt{x^2+1})'x-\sqrt{x^2+1}(x)'}{x^2}\\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'\right) - \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)'\cdot x-\sqrt{x^2+1}}{x^2}\\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) - \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot x-\sqrt{x^2+1}}{x^2}\\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \frac{\frac{x^2-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2-x^2-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}.
\end{aligned}
$$

1.18. $y = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3} + 2\ln\dfrac{x-3}{x-2}$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{\sqrt{x-2}}{x-3} + 2\ln\frac{x-3}{x-2}\right)' = \frac{(\sqrt{x-2})'(x-3)-\sqrt{x-2}(x-3)'}{(x-3)^2}\\
&+ 2\frac{1}{\frac{x-3}{x-2}}\cdot\left(\frac{x-3}{x-2}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\cdot(x-3)-\sqrt{x-2}}{(x-3)^2}\\
&+ 2\frac{x-2}{x-3}\cdot\frac{(x-3)'(x-2)-(x-3)(x-2)'}{(x-2)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\dfrac{x-3-2(x-2)}{2\sqrt{x-2}}}{(x-3)^2} + \frac{2}{x-3}\cdot\frac{x-2-x+3}{x-2} \\
&= \frac{x-3-2x+4}{2(x-3)^2\sqrt{x-2}} + \frac{2}{(x-3)(x-2)} \\
&= \frac{1-x}{2(x-3)^2\sqrt{x-2}} + \frac{2}{(x-3)(x-2)} = \frac{(1-x)\sqrt{x-2}+4(x-3)}{2(x-3)^2(x-2)}.
\end{aligned}
$$

1.19. $y = \dfrac{x}{2} + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{x}{2} + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\dfrac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2+x^4-4x^2}}\cdot\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{1-2x^2+x^4}}\cdot\frac{2(1-x^2)}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{1+x^2}.
\end{aligned}
$$

1.20. $y = \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

Решење.

$$
y' = \left(\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)'
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}\frac{1}{\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}}\left(\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right)' - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{1+\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\frac{1}{\sqrt{3}}2 \\
&= \frac{1}{6}\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}\frac{2(x-1)(x^2+x+1)-(x-1)^2(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{3}\frac{2}{1+\dfrac{(2x+1)^2}{3}} \\
&= \frac{1}{6}\frac{x-1}{(x-1)^2}\frac{2x^2+2x+2-2x^2-x+2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2}{3+4x^2+4x+1} \\
&= \frac{3x+3}{6(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{2}{4(x^2+x+1)} \\
&= \frac{x+1}{2(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{1}{2(x^2+x+1)} \\
&= \frac{x+1-2x+2}{2(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{3-x}{2(x-1)(x^2+x+1)}.
\end{aligned}
$$