Prof. dr Siniša G. Minić

INFORMACIONE TEHNOLOGIJE

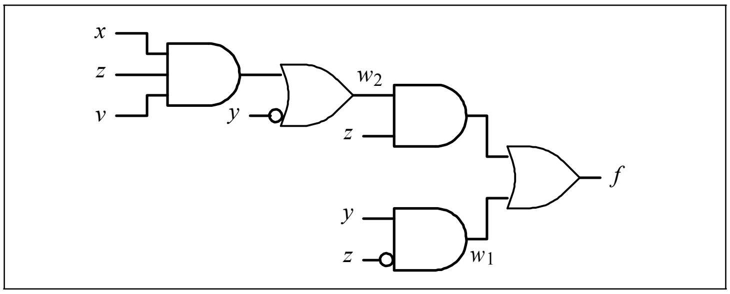
LEPOSAVIĆ, 2015.

a) prvo se za sve vrednosti funkcije $F = 1$ pravi konjunkcija logičkih promenljivih i to samih promenljivih ukoliko je njihova vrednost u tom slučaju jednaka 1, odnosno negacija promenqivih ako je njihova vrednost jednaka 0. Na primer, za broj 3 je $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, pa je njoj odgovarajuća konjunkcija $\bar{x}_1x_2x_3$.

b) kada su formirane sve konjunkcije za vrednosti $F = 1$, onda se one povezuju operatorom disjunkcije $(+)$ i na taj način se dobija disjunktivna normalna forma date funkcije F.

Kombinovanjem logičkih kola mogu se realizovati proizvoljne logičke funkcije. Skup operacija [I, ILI, NE] predstavlja osnovu za generisanje logičkih funkcija. No, operacija I se može realizovati pomoću operacije ne i ILI, pa skup skup [NE, ILI] takođe čini bazu logičkog sistema. Može se jednostavno pokazati da i skip [NE, I] takođe čini bazu logičkog sistema.

Primer 3.2 *Formirati Bulovu funkciju koja opisuje sledeće logičko kolo sa četiri ulaza: x, y, z i v.*



Sl. 3.10: Logičko kolo sa četiri ulaza x, y, z i v.

Na slici su uvedene oznake međurezultata logičkih operacija: w_1 *i* w_2. *Idući od desnog kraja šeme (izlaz iz kola) prema ulazima, izračunava se*

$$f = w_1 + z w_2$$
$$w_1 = y\bar{z}$$
$$w_2 = xzv + \bar{y}$$

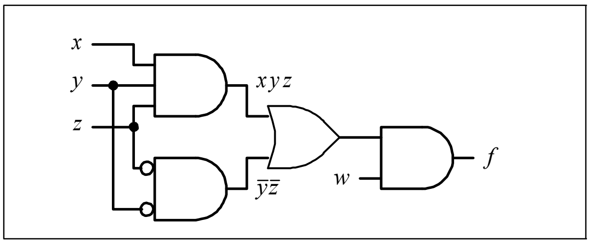
Smenom izraza za w_1 *i* w_2 *u izraz za* f *dobija se konačno*

$$f = y\bar{z} + z(\bar{y} + xzv) = y\bar{z} + z\bar{y} + xzv$$
$$f = y\bar{z} + z(\bar{y} + xv)$$

Primer 3.3 *Formirati logičko kolo koje generiše Bulovu funkciju*

$$f(x,y,z,w) = w(xyz + \overline{y}\overline{z})$$

Na Slici 3.11 prikazano je logičko kolo.



Sl. 3.11: Logičko kolo sa četiri ulaza x, y, z i w.

Drugi način predstavljanja je već korišćen kod definisanja elementarnih logičkih operacija, a to je *kombinaciona tablica*. Ovaj način nije pogodan ako je broj promenljivih veliki, zato što broj vrsta tablice raste kao stepen broja dva.

Jedan od najčešćih načina je predstavljanja je *algebarski* način. Kod takvog prikaza se logička funkcija predstavlja u vidu izraza koji čine simboli promenljivih (literali) povezanih simbolima I i ILI operacije. Ovaj način predstavljanja je pogodan za bilo koji broj logičkih promenljivih.

Algebarska predstava logičkih funkcija obično se izvodi u vidu tzv. standardnih formi. Suma proizvoda predstavlja logički zbir članova koji su u obliku logičkih proizvoda. Ako logički proizvodi sadrže sve promenljive, takva se standardna forma naziva potpuna forma ili disjuktivna normalna forma. Svaki takav potpuni logički proizvod odgovara jednoj vrsti kombinacione tablice u kojoj logička funkcija ima vrednost jedan.

Ako se formira logički proizvod članova koji su u obliku logičkog zbira promenljivih, reč je o tzv. proizvodu suma, a takva standardna forma se naziva konjuktivna normalna forma. Svaki potpuni logički zbir odgovara jednoj vrsti kombinacione tablice u kojoj logička funkcija ima vrednost jednaku nuli.

Kod obe alternativne forme svaka promenljiva se javlja bilo u komplementiranom ili nekomplementiranom obliku u svakom od članova tipa proizvoda ili zbira. Svaki član tipa proizvoda koji ima ovu osobinu naziva se *minterm* i označava se sa m_i, $0 \leq i \leq 2^{n-1}$, dok svaki član sume proizvoda koji ima ovu osobinu naziva se *maksterm* i označava sa M_i, $0 \leq i \leq 2^{n-1}$. n je broj promenljivih Bulove funkcije.

Za svaku Bulovu funkciju koja je u potpunosti komponovana od mintermova kažemo da kanoničnu formu tipa zbira proizvoda. Ako je Bulova funkcija u potpunosti komponovana od makstermova, tada kažemo da ima kanoničnu formu tipa proizvoda suma. Kod Bulove funkcije od n promenljivih postoji 2^n mintermova, odnosno 2^n makstermova.

Lako je uočiti da komplement bilo kog minterma predstavlja maksterm i obrnuto. U Tabeli 3.1 prikazani su mintermovi i makstermovi za Bulovu funkciju od tri promenljive $F(x_1, x_2, x_3)$

Tab. 3.1: Mintermovi i makstermovi za Bulovu funkciju od tri promenljive.

dec. br.	x_1	x_2	x_3	Minterm	Oznaka	Maksterm	Oznaka
0	0	0	0	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	m_0	$x_1+x_2+x_3$	M_0
1	0	0	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	m_1	$x_1+x_2+\bar{x}_3$	M_1
2	0	1	0	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	m_2	$x_1+\bar{x}_2+x_3$	M_2
3	0	1	1	$\bar{x}_1x_2x_3$	m_3	$x_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3$	M_3
4	1	0	0	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	m_4	$\bar{x}_1+x_2+x_3$	M_4
5	1	0	1	$x_1\bar{x}_2x_3$	m_5	$\bar{x}_1+x_2+\bar{x}_3$	M_5
6	1	1	0	$x_1x_2\bar{x}_3$	m_6	$\bar{x}_1+\bar{x}_2+x_3$	M_6
7	1	1	1	$x_1x_2x_3$	m_7	$\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3$	M_7

Komplement Bulove funkcije čine mintermovi čija je vrednost jenaka nuli. Neka je logička funkcija f_1 predstavljena u obliku zbira mintermova

$$f_1 = \bar{x}\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz = m_1 + m_4 + m_7,$$

tada njen komplement čine preostali mintermovi

$$\begin{aligned}\overline{f}_1 &= m_0 + m_2 + m_3 + m_5 + m_6 \\ &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z}.\end{aligned}$$

Pošto je $f_1 = \overline{(\overline{f}_1)}$ dobija se f_1 u obliku proizvoda makstermova.

$$\begin{aligned}f_1 = \overline{(\overline{f}_1)} &= (x+y+z)(x+\bar{y}+z)(x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z) \\ &= M_0M_2M_3M_5M_6\end{aligned}$$

Primer 3.4 *Logičku funkciju zadatu kombinacionom tablicom 3.2 predstaviti u obliku kanonične forme sume proizvoda i kanonične forme proizvoda suma.*

Suma proizvoda

$$F = \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3$$

Proizvod suma

$$F = (x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+\bar{x}_3)(x_1+\bar{x}_2+x_3)(\bar{x}_1+x_2+\bar{x}_3)$$

Tab. 3.2: Kombinacona tablica za Primer 3.4.

dec. br.	x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Za Bulovu funkciju koja je u potpunosti komponovana od mintermova ili makstermova kaže se da ima kanoničnu normalnu formu. Ukoliko to nije slučaj naziva se *Disjuktivna normalna forma* ako je predstavljena u obliku sume proizvoda, odnosno *konjuktivna normalna forma* ako je predstavljena u obliku proizvoda suma. Napomenimo da se svaka predidačka funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ može se na jedinsven način napisati u obliku kanonične normalne forme.

Transformisanje disjuktivne normalne forme u kanoničnu disjuktivnu normalnu formu se zasniva na razvijanju svih elementarnih proizvoda u zadatoj disjuktivnoj normalnoj formi do potpunih proizvoda i eliminaciji suvišnih članova. Transformisanje konjuktivne normalne forme u kanoničnu nonjuktivnu normalnu formu se zasniva na razvijanju svih elementarnih suma u zadatoj konjuktivnij normalnoj formi do potpunih suma i eliminaciji suvišnih članova.

Na primer, transformacija disjuktivne normalne forme u kanoničnu disjuktivnu normalnu formu može se izvršiti na sledeći nači.

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= A + \overline{B}C \\ &= A(B+\overline{B}) + \overline{B}C \\ &= AB + A\overline{B} + \overline{B}C \\ &= AB(C+\overline{C}) + A\overline{B}(C+\overline{C}) + (A+\overline{A})\overline{B}C \\ &= ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C \end{aligned} \tag{3.19}$$

Dakle, kanonična disjuktivna normalna forma funkcije $F(A,B,C)$ komponovana od mintermova ima oblik

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= \overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC \\ &= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Jednačina (3.20) predstavlja kanoničnu disjuktivnu normalnu formu funkcije $F(A,B,C)$ od tri promenlive jer je u potpunosti komponovana od mintermova.

Primer 3.5 *Proširiti sledeću Bulovu funkciju funkciju datu u formi nekanoničnog proizvoda suma* $f(x,y,z) = (x+y)(\overline{x}+z)$.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+y+z\overline{z})(\overline{x}+y\overline{y}+z) \\ &= (x+y+z)(x+y+\overline{z})(\overline{x}+y+z)(\overline{x}+\overline{y}+z) \\ &= M_0 M_1 M_4 M_6 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Primer 3.6 *Izvršiti konverziju funkcije* $F = xy+\overline{x}z$ *u proizvod makstermova.*

$$\begin{aligned} F &= xy+\overline{x}z \\ &= (xy+\overline{x})(xy+z) && : \text{Zakon distribucije} \\ &= (x+\overline{x})(y+\overline{x})(x+z)(y+z) && : \text{Zakon distribucije} \\ &= (\overline{x}+y)(x+z)(y+z). && : x+\overline{x} = 1 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Pošto je $\overline{x}+y = \overline{x}+y+z\overline{z}$, $x+z = x+z+y\overline{y}$ *i* $y+z = y+z+x\overline{x}$ *dobija se*[1]

$$\begin{aligned} F &= (x+y+z)(x+\overline{y}+z)(\overline{x}+y+z)(\overline{x}+y+\overline{z}) : \textit{Zakon distribucije} \\ &= M_0 M_2 M_4 M_5. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Treći način koji je pogodniji ako je broj promenljivih veliki je predstavljanje pomoću *skupa indeksa*. Naime, svakoj vrsti kombinacione tablice može se pridružiti indeks koji predstavlja decimalni ekvivalent binarnog broja ispisanog u toj vrsti. Zatim se formira skup indeksa vrsta gde funkcija ima vrednost 0 ili 1. Na primer isključivo-ILI operacija se može definisatina sledeće načine $Y = \quad (1,2)$ ili $Y = \quad (0,3)$.

Primer 3.7 *Funkcija*

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) = {} & \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_4 + x_1 \overline{x}_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \\ & + \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 + x_1 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4 + \overline{x}_1 x_2 x_3 x_4 \end{aligned}$$

može se predstaviti u vidu skupa decimalnih indeksa na sledeći način

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \quad (5,11,12,0,10,7)$$

Primer 3.8 *Logička funkcija* $f(x_1,x_2,x_3)$ *zadata je skupom decimalnih indeksa* $f^{(1)} = \quad (2,3,5,6)$, *napisati je u obliku kanonične disjuktivne forme i u obliku kanonične konjuktivne forme.*

Kanonična disjuktivna forma

$$f = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \overline{x}_3$$

[1] $x\overline{x} = y\overline{y} = z\overline{z} = 0$

Pošto je $f^{(0)} = \quad (0,1,4,7$ *to je kanonična konjuktivna forma*

$$f = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \overline{x}_3)(\overline{x_1} + x_2 + x_3)(\overline{x_1} + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)$$

Četvrti način koji je vrlo pogodan za za funkcije sa malim brojem promenljivih, najčešće do četiri, je pomoću Karnoovih tablica ili *Karnoovih mapa*. Ovaj način je izveden iz predstavljanja pomoću skupa indeksa i predstavlja njegovu grafičku predstavu. Karnoova tablica se satoji od 2^n kvadrata koji predstavljaju elementarne površine. Svakoj elementarnoj površini odgovara jedan potpuni proizvod, ili potpuni zbir, odnosno jedan jedini indeks. Vrednost indeksa može se sračunati na osnovu binarnih kombinacija, koje su prikazane levo i iznad tabele na isti način kao kod predstavljanja skupa indeksa. Korespodencija između elementarnih površina i indeksa u slučaju Karnoove tablice za funkciju od tri promenljive prikazana je na Slici 3.12. Funkcija je definisana preko indeksa za koje ima vrednost jedinicu, te je u odgovarajuća elementarna polja upisana jadinica. U slučaju kada je funcija definisana preko indeksa za koje ima vrednost nulu, tada se u odgovarajuća polja upisuju nule. Oba načina predstavljanja su potpuno ravnopravna, ali se u praksi češće koristi prvi način predstavljnja.

	f	x_2x_3 00	01	11	10
x	0	0	1	3	2
	1	4	5	7	6

(a)

	$f^{(1)}$	x_2x_3 00	01	11	10
x	0	0	0	1	1
	1	0	1	1	1

(b)

Sl. 3.12: Karnoova tablica za funkciju od tri promenljive. (a) Brojni indeksi polja u Karnoovoj mapi. (b) Funkcija $f^{(1)}$ predstavljena kao suma proizvoda.

Primer 3.9 *Predstavljanje logičke funkcije od četiri promenljive definisane skupom indeksa, pomoću Karnoove mape*

$$Y = \quad (0,1,8,9,10,11,14,15)$$

Brojni indeksi polja u Karnoovoj mapi sa četiri promenljive prikazani su na Slici 3.13(a). Karnoova mapa prikazana je na Slici 3.13(b).

Pošto je funkcija definisana preko indeksa za koje ima vrednost jedinicu, logočka funkcija koja odgovara Karnoovoj tablici na Slici 3.13 je

$$\begin{aligned} Y =& \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 \\ &+ x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2x_3x_4 + x_1x_2x_3\overline{x}_4 + x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

	Y	00	01	11	10
	00	0	1	3	2
$x\,x$	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

(a)

	Y	00	01	11	10
	00	1	1	0	0
$x\,x$	01	0	0	0	0
	11	0	0	1	1
	10	1	1	1	1

(b)

Sl. 3.13: Karnoova tablica za funkciju od četiri promenljive. (a) Brojni indeksi polja u Karnoovoj mapi. (b) Funkcija Y predstavljena kao suma proizvoda.

Karnoove tablice se veomačesto primenjuju za predstavljanje logičkih funkcija, zato što omogućavaju vrlo jednostavno uprošćavanje funkcija. U vezi sa tim treba definisati pojam susednih polja. Elementarna polja su susedna ako imaju zajedničku stranicu. Potpuni logički proizvod koji im odgovara razlikuje se samo po vrednosti jedne promenljive. Kod jednog proizvoda je komplementarna, a kod drugog ne. Zbog toga se kao susedna elementarna polja mogu smatrati i polja koja se nalaze u istoj vrsti ili koloni a čija je jedna stranica ivica tabele. Takva su na primer polja 1 i 9, ili 12 i 14. Takođe se mogu definisati i polja veće površine koja nastaju sažimanjem susednih elementarnih polja. Njima odgovaraju nepotpuni logički proizvodi u kojima nedostaju promenljive koje se razlikuju po svojim vrednostima u elementarnim poljima koja su obuhvaćena poljem veće površine.

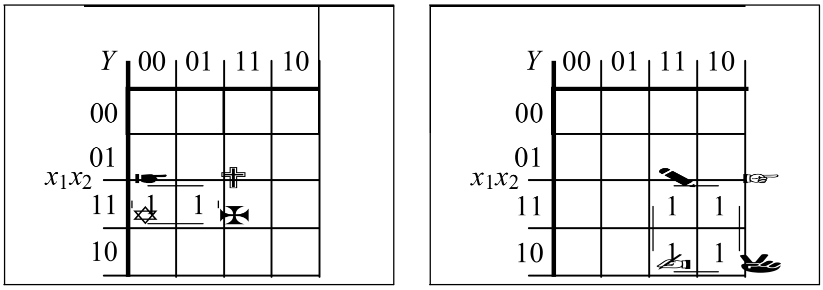
3.4.1 Minimizacija logičkih funkcija

Može se zaključiti da se ista logička funkcija može napisati u vidu algebarskog izraza na više različitih načina koji, iako definišu istu funkciju, ne moraju biti podjednako pogodni za praktičnu realizaciju. Da bi se funkcija pripremila za praktičnu realizaciju mora se dovesti na najpovoljniji oblik. U tu svrhu moraju se postaviti neki kriterijumi optimalnosti, na osnovu kojih se izvodi proces minimizacije logičkih funkcija.

Minimizacija je postupak transformacije složene logičke funkcije u funkciju koja ima istu logičku vrednost, ali manj broj elemenata, manje operanada i operacija koje nad njima treba izvršiti.

Metodi minimizacije logičkih funkcija su brojni. Među njima najviše se koriste algebarski metodi i grafički metodi na bazi Karnoove tablice.

Ovu finkciju definišu jedinice u dva susedna elementarna polja u Karnoovoj tablici što je prikazono na Slici 3.14(a). Novo polje prikazano je nepotpunim logičkim proizvodom $x_1x_2\bar{x}_3$.



(a) (b)

Sl. 3.14: Karnoova tablica za funkciju od četiri promenljive. (a) $Y =$ (12, 13) (b) $Y =$ (10, 11, 14, 15).

Posmatrajmo sada izraz

$$\begin{aligned} Y &= x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \\ &= x_1x_2x_3(x_4+\bar{x}_4) + x_1\bar{x}_2x_3(x_4+\bar{x}_4) \\ &= x_1x_3(x_2+\bar{x}_2) = x_1x_3 \end{aligned}$$

prikazan skupom na Slici 3.14(b). Vidi se da je izraz definisan jedinicama u četiri susedna elementarna polja u Karnoovoj tabeli. Uprošćenom izrazu odgovara četiri puta veće polje koje je dobijeno sažimanjem elementarnih polja, a kome odgovara logički proizvod x_1x_3.

Kao treći karakteristični slučaj posmatrajmo izraz koji je definisan jedinicama u četiri elementarna polja u Karnoovoj tablici na Slici 3.15(a) koja su, kao što je već rečeno, susedna

$$\begin{aligned} Y &= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4(x_3+\bar{x}_3) + x_1\bar{x}_2\bar{x}_4(x_3+\bar{x}_3) = \bar{x}_2\bar{x}_4. \end{aligned}$$

Uprošćenom izrazu odgovara četiri puta veće polje koje je dobijeno sažimanjem elementarnih polja, a koje predstavlja logički proizvod $\bar{x}_2\bar{x}_4$.

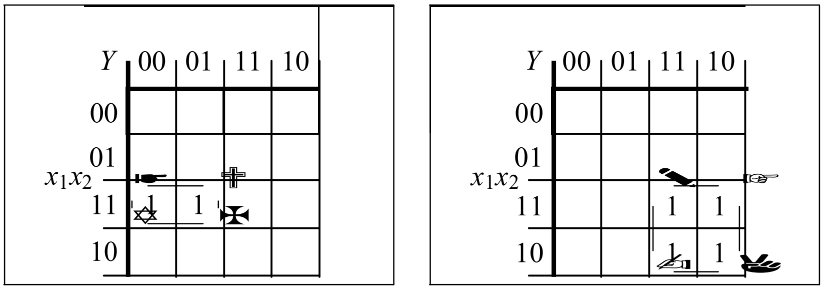
Na kraju posmatrajmo izraz

$$\begin{aligned} Y =& x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3\bar{x}_4 \\ &+ x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \end{aligned}$$

prikazan Karnoovm tablicom na Slici 3.15(b), a koja se prema pravilima algebarske minimizacije svodi na

$$Y = x_1$$

Ovu finkciju definišu jedinice u dva susedna elementarna polja u Karnoovoj tablici što je prikazono na Slici 3.14(a). Novo polje prikazano je nepotpunim logičkim proizvodom $x_1x_2\overline{x}_3$.



(a) (b)

Sl. 3.14: Karnoova tablica za funkciju od četiri promenljive. (a) $Y = (12, 13)$ (b) $Y = (10, 11, 14, 15)$.

Posmatrajmo sada izraz

$$\begin{aligned} Y =& x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \\ =& x_1x_2x_3(x_4 + \overline{x}_4) + x_1\overline{x}_2x_3(x_4 + \overline{x}_4) \\ =& x_1x_3(x_2 + \overline{x}_2) = x_1x_3 \end{aligned}$$

prikazan skupom na Slici 3.14(b). Vidi se da je izraz definisan jedinicama u četiri susedna elementarna polja u Karnoovoj tabeli. Uprošćenom izrazu odgovara četiri puta veće polje koje je dobijeno sažimanjem elementarnih polja, a kome odgovara logički proizvod x_1x_3.

Kao treći karakteristični slučaj posmatrajmo izraz koji je definisan jedinicama u četiri elementarna polja u Karnoovoj tablici na Slici 3.15(a) koja su, kao što je već rečeno, susedna

$$\begin{aligned} Y =& \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \\ =& \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4(x_3 + \overline{x}_3) + x_1\overline{x}_2\overline{x}_4(x_3 + \overline{x}_3) = \overline{x}_2\overline{x}_4. \end{aligned}$$

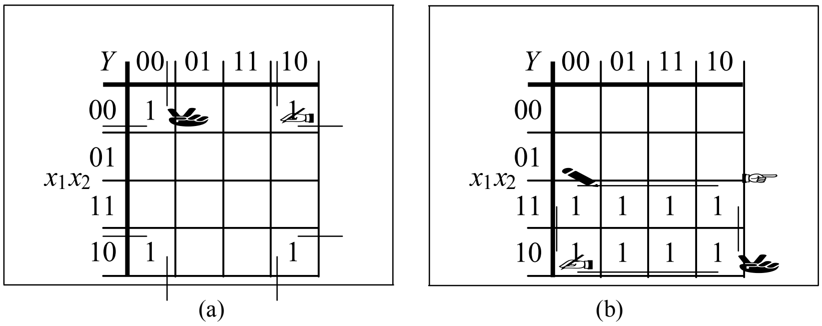
Uprošćenom izrazu odgovara četiri puta veće polje koje je dobijeno sažimanjem elementarnih polja, a koje predstavlja logički proizvod $\overline{x}_2\overline{x}_4$.

Na kraju posmatrajmo izraz

$$\begin{aligned} Y =& x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1x_2\overline{x}_3x_4 + x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3\overline{x}_4 \\ &+ x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \end{aligned}$$

prikazan Karnoovm tablicom na Slici 3.15(b), a koja se prema pravilima algebarske minimizacije svodi na

$$Y = x_1$$



(a) (b)

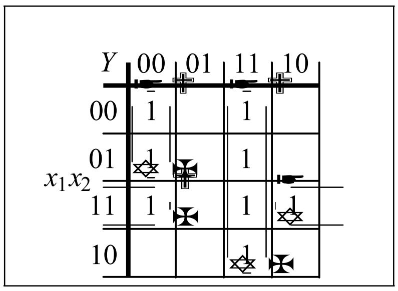
Sl. 3.15: Karnoova tablica za funkciju od četiri promenljive. (a) $Y = \quad (0, 2, 8, 10)$ (b) $Y = \quad (2, 3, 6, 7, 14, 15, 10, 11)$.

Uočava se da se ovde osam elemenatarnih polja sažima u jedno osam puta manje polje kome odgovara promenljiva x_1.

Na osnovu ovih karakterističnih slučajeva prikazanih na Karnoovim tablicama za funkcije od četiri promenljive mogu se izvesti generalna pravila za minimizaciju logičkih funkcija pomoću Karnoovih tablica. Ukoliko je logička funkcija napisana u obliku sume proizvoda ili skupom indeksa za koje ima vrednost 1, postupak minimizacije se svodi na sprovođenje sledećih koraka:

1. Nacrtati Karnoovu tablicu i u odgovarajuća polja upisati jedinice.
2. Formirati veće pravougaone površine od 2^k polja koje obuhvataju sve jedinice.
3. Napisati razultat u obliku sume nepotpunih proizvoda izostavljajući promenljive koje su u istoj konturi imaju pravu i komplementarnu vrednost.

Primer 3.10 *Minimizacija funkcije sa četiri promenljivih primenom Karnoove Tablice prikazane na Slici 3.16*



Sl. 3.16: Karnoova tablica za funkciju od četiri promenljive $Y = \quad (0, 3, 4, 7, 11, 12, 14, 15)$.

U prekidačkoj funkciji prikazanoj Karnoovom tablicom mogi se formirati tri kontire koje obuhvataju polja $\{0,4\}$, $\{12,14\}$ *i* $\{3,7,11,15\}$. *Nepotpuni proizvodi za ove konture čine minimalnu formu*

$$Y = \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1x_2\overline{x}_4 + x_3x_4$$

Karnoove karte su posebno pogodne za određivanje minimalnih formi nepotpuno definisanih funkcija. Pri tome se ćelije u kojoma su upisani znaci × mogu uključivati u pravilne konture što većeg ranga[2] kojima se pokrivaju znaci 1 i × date funkcije. Time se može smanjiti broj potrebnih kontura ili povećati rang nekih kontura, često i jedno i drugo.

Kritrijumi koji se obično koriste pri određivanu minimalne forme su su sledeći:

- Od dva sistema koji obavljaju istu logičku funkciju minimalan je onaj koji sadrži manji broj osnovnih logičkih kola.
- Od dva sistema koja obavljaju istu logičku funkciju i sadrže isti broj osnovnih logičkih kola , minimalan je onaj koji ima manji broj ulaza u logička kola.

Primer 3.11 *Neka je logička funkcija od tri promenljive predstavljena u obliku zbira mintermova sledećom funkcijom*

$$Y = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 + \overline{x}_1x_2x_3x_4 + x_1x_2\overline{x}_3x_4$$

pti čemu je kombinacija $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 = 1$ *zabranjena, tj. neće se pojaviti nikada na ulazu, a za kombinacije* $x_1x_2x_3x_4 = 1$ *i* $\overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4 = 1$ *nije od značaja vrednost funkcije na izlazu. Ovako opisanoj logičkoj funkciji može pridružiti karnoova mapa prikazana na Slici 3.17(a). Zabranjena stanja na ulazu i stanja bez značaja za vrednost funkcije označena su sa* ×.

Skup indeksa ovako definisane logičke funkicije Y ima oblik

$$Y = \quad (2,5,7,13) + \times(0,6,15),$$

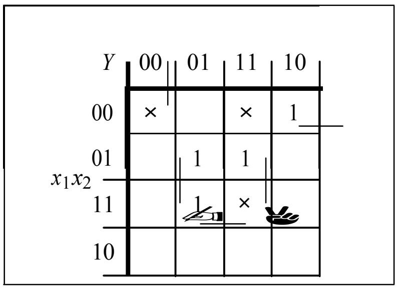
dok je Karnoova mapa prikazana na Slici 3.17(a).

Minimalna forma pridružena funkciji Y, dobijena formiranjem dva pravougaonika. Prvi sadrži četiri polja $\{5,7,13,15\}$, *a drugi dva polja* $\{0,2\}$. *Dakle je*

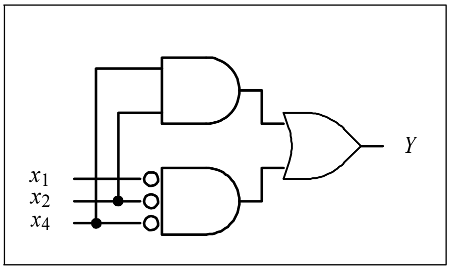
$$Y = x_2x_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4.$$

Realizovana minimalna logička mreža prikazana je na Slici 3.17(b). Logička mreža sadrži dva I kola i jedno ILI kolo. Da bi se uprostilo crtanje, kružić na ulazu u logičko ILI kolo sa tri ulaza označava da se vrši invertovanje ulaznih promenljivih.

[2] Rang je broj polja koja obuhvata kontura pravougaonog oblika.



(a)



(b)

Sl. 3.17: (a) Karnoova tablica za funkciju od četiri promenljive sa zabranjenim stanjem i sa kombinacijama bez značaja za vrednost logičke funkcije. (b) Realizovana minimalna logička mreža.

Primer 3.12 *Potrebno je izvršiti onverzija BCD*[3] *kôda u kôd više tri. Kôd više tri dat je u Tabeli 2.2.*

U tabeli 3.3 prikazane su dozvoljene kombinacije binarnih promenljivih A, B, C i D, odnosno kombinacije koje kodiraju binarne brojeve od 0 do 9. Tabela sadrži i zabranjena stanja.

Tab. 3.3: Kombinaciona tabela za konverziju BCD koda u kod više tri.

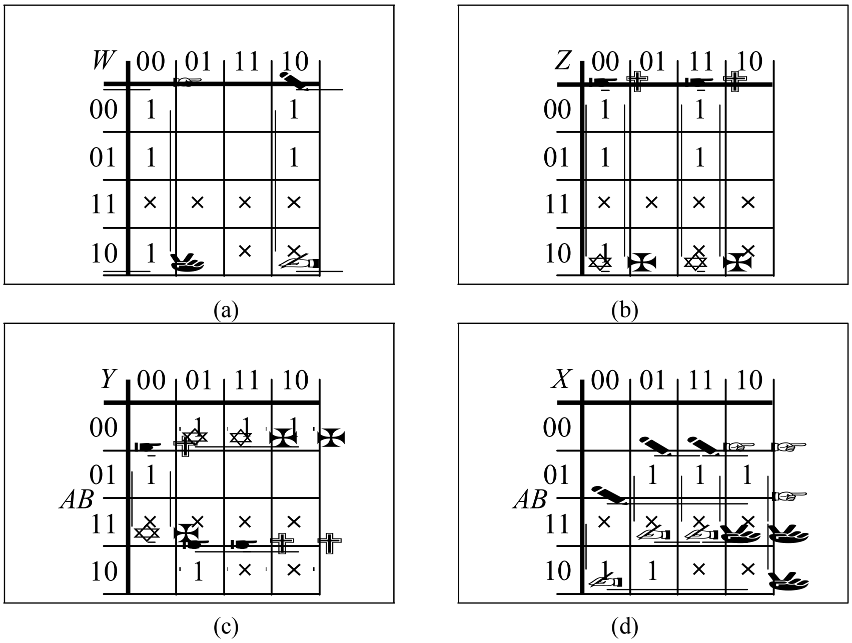
A	*B*	*C*	*D*	*X*	*Y*	*Z*	*W*
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	×	×	×	×
1	0	1	1	×	×	×	×
1	1	0	0	×	×	×	×
1	1	0	1	×	×	×	×
1	1	1	0	×	×	×	×
1	1	1	1	×	×	×	×

[3]BCD kôd (engl. Binary Coded Decimal) je sistem kodiranja za predstavljanje bilo koje dekadne cifre kao skup četvorobitnih binarnih brojeva. BCD cifre koriste samo 10 od 16 mogućih kombinacija sa četiri bita. Po ovom postupku broj dekadni broj 293 prikazuje se binarnim ekvivalentom u BCD kodu na sedeći način 0010 1001 0011.

Logičke funkcije WZYX predstavljene skupom indeksa imaju oblik

$$\begin{aligned} W =&\ (0,2,4,6,8)+\times(10,11,12,13,14,15)\\ Z =&\ (0,3,4,7,8)+\times(10,11,12,13,14,15)\\ Y =&\ (1,2,3,4,9)+\times(10,11,12,13,14,15)\\ X =&\ (5,6,7,8,9)+\times(10,11,12,13,14,15) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Karnoove mape su prikazane na Slici 3.18 vodeći računa da je kodna tabela nepotpuna, tj. da se indeksi od 10 do 15 ne mogu pojaviti.



Sl. 3.18: Karnoove tablice dekodera BCD kôda u kôd viška 3. (a) $W=\overline{D}$, (b) $Z=\overline{C}\,\overline{D}+CD$, (c) $Y=B\overline{C}\,\overline{D}+\overline{B}C+\overline{B}D$, (d) $X=A+BC+BD$

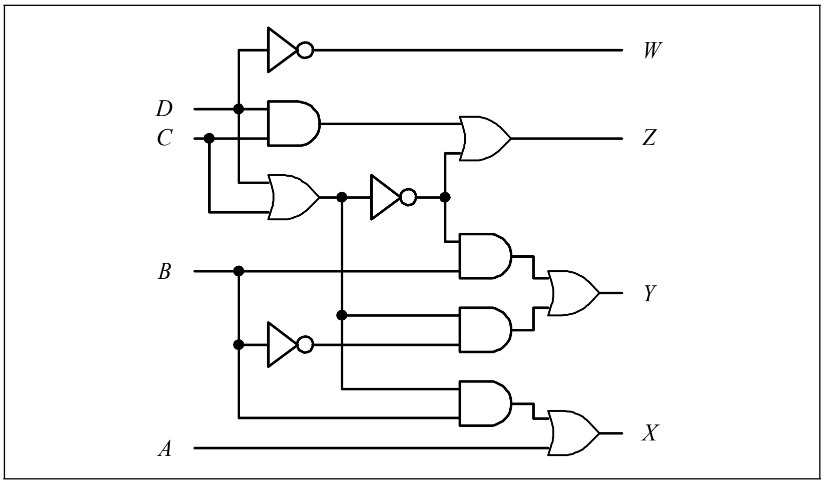
Minimalne forme imaju oblik

$$W=\overline{D}, \qquad Y=B\overline{C}\,\overline{D}+\overline{B}C+\overline{B}D,$$
$$Z=\overline{C}\,\overline{D}+CD, \qquad X=A+BC+BD.$$

Pošto je $\overline{C}\,\overline{D}=\overline{C+D}$ *može se pisati da je*

$$W=\overline{D}, \qquad Y=B(\overline{C+D})+\overline{B}(C+D),$$
$$Z=CD+(\overline{C+D}), \qquad X=A+B(C+D).$$

Logička šema dekodera prikazana je na Slici 3.19



Sl. 3.19: Logička šema konvertora BCD kôda u kod viška 3.

Napomenimo da se Karnoove mape obično ne koriste za funkcije više od pet promenljivih, jer tada postaju jako nepregledne.

3.5 Prekidačke mreže

Mreže logičkih kola sa n ulaznih i m izlaznih priključaka nazivaju se prekidačke mreže. Logička kola koja čine prekidačku mrežu povezuju se nz sledeći način:

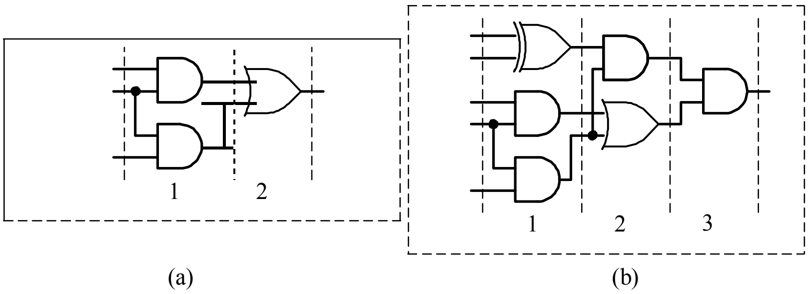
1. Na svaki ulaz logičkog elementa priključen je izlaz nekog drugog logičkog elementa ili je to primarni ulaz,
2. Ulazi logičkih mreža su konstante 0 ili 1,
3. Nijedna dva izlaza nisu međusobno povezana,
4. Ne postoje povratne veze u mreži koje povezuju izlaz nekog logičkog elementa sa njegovim ulazom, pri čemu veza može da sadrži i druge logičke elemente.

Prekidačke mreže definisane na gornji način nazivaju se kombinacine mreže . Za ovakve mreže kažemo da ne sadrže memorijske elemente, odnosno da u njima ne postoji povratna veza.

Šema koja pokazuje kako su povezana logička kola u prekidačkoj mreži naziva se strukturna ili funkcionalna šema prekidačke mreže.

Bitan parametar svake prekidačke mreže je broj stepeni (nivoa) te mreže. Ovaj parametar određuje kroz koliko logičkih elemenata signal mora da prođe otkad uđe u prekidačku mrežu, pa dok ne dođe na njen izlaz. Za logički element se kaže da pripada i-tom stepenu ili i-tom nivou kombinacione mreže ako je i najveći broj logičkih elemenata kroz koje prolazi signal od ulaza mreže do izlaza posmatranog elementa. Drugačije rečeno, logički element pripada i-tom stepenu ako je $i-1$ najveći stepen kojem pripada bar jedan od logičkih elemenata čiji su izlazi vezani na ulaze posmatranog elementa. Pritom, prvom stepenu pripadaju svi elementi na čije ulaze dolaze direktno spoljašnji signali.

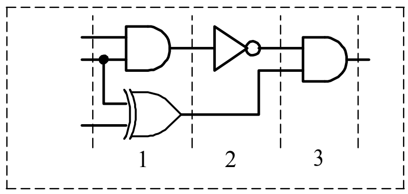
Na Slici 3.20 dati primeri za dvostepenu i trostepenu mrežu.



Sl. 3.20: (a) Dvostepena mreža. (b) Trostepena mreža

Za kombinacionu mrežu se kaže da je i-tog stepena (recimo: dvostepena, trostepena, petostepena...) ako je i najveći stepen nekog logičkog elementa u toj mreži. Broj stepeni prekidačke mreže direktno utiče na kašnjenje izlaznog signala u odnosu na ulazni, jer svaki logički element za sebe unosi određeno kašnjenje, te što ih signal više mora proći na svom putu od ulaza do izlaza to će više kasniti.

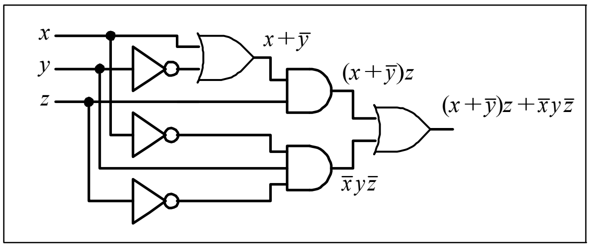
Valja napomenuti da se, pri određivanju stepena kola, gleda najduži put koji signal može da pređe. Putevi ne moraju biti iste dužine. Primer na Slici 3.21 prikazuje kolo koje ima i duže i kraće puteve (na jednom od puteva nalazi se invertor, a na drugom ne), pri čemu se gleda uvek najduži put, te i ovo kolo spada u trostepenu logičku mrežu.



Sl. 3.21: Trostepena logička mreža

Analiza kombinacionih mreža satoji se u nalaženju prekidačke funkcije ili sistema funkcija koje realizuje zadata mreža. Izlazne funkcije se izražavaju u analitičkom obliku pomoću bulovog izraza, tj. izraza u kome se koriste elementarne bulove operacije ili pomoću kombimacionih tabela.

Primer 3.13 *Za prekidačku mrežu prikazanu na Slici 3.22 potrebno je odrediti prekidačku funkciju kola.*



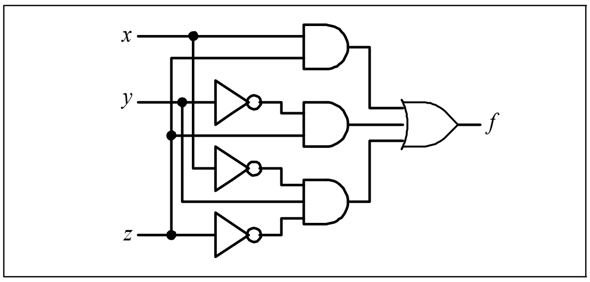
Sl. 3.22: Prekidačka mreža četvrtog stepena sa tri ulaza i jednim izlazom

$$f=(x+\overline{y})z+(\overline{x}y\overline{z}) \tag{3.25}$$

Izraz (3.25) je dobijen analizom kola sa Slike 3.22. Primenom teorema koje se odnose na prekidačke funkcije dobija se drugi oblik izraza (3.25). Nakon izvršenog množenja dobija se

$$f=xz+\overline{y}z+\overline{x}y\overline{z} \tag{3.26}$$

Na Slic 3.23 prikazana je realizacija prenosne funkcije prema izrazu (3.26)



Sl. 3.23: Trostepena I-ILI implementacija logičke funkcija sa slike3.22.

Koristeći Zakon distrubucije[4] *izraz (3.25 može se transformisati na sledeći način*

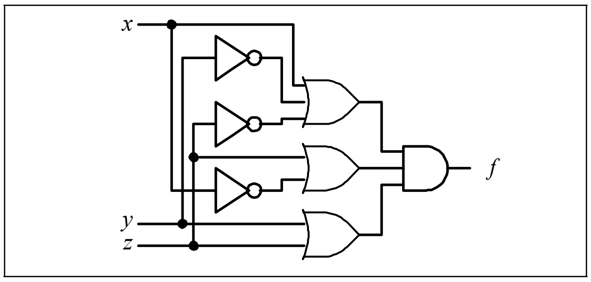
$$\begin{aligned} f=&(x+\overline{y})z+(\overline{x}y\overline{z})\\ =&(\overline{x}y\overline{z}+x+\overline{y})(\overline{x}y\overline{z}+z)\end{aligned} \tag{3.27}$$

[4] $A+BCD=(A+B)(A+C)(A+D)$

Primenom Zakon distribucije na činioce dobija se

$$
\begin{aligned}
f &= (x+\bar{y}+\bar{x})(x+\bar{y}+y)(x+\bar{y}+\bar{z})(z+\bar{x})(z+y)(z+\bar{z}) \\
&= 1\cdot 1\cdot (x+\bar{y}+\bar{z})(z+\bar{x})(z+y)\cdot 1 \qquad (3.28) \\
&= (x+\bar{y}+\bar{z})(z+\bar{x})(z+y)
\end{aligned}
$$

Na Slic 3.24 prikazana je realizacija prenosne funkcije prema izrazu (3.28)



Sl. 3.24: Trostepena ILI-I implementacija logičke funkcija sa slike 3.22.

3.6 Pitanja za proveru znanja

1. Koja od navedenih Bulovih funkcija je ekvivalentna sa $x\cdot y + x\cdot y\cdot z$?

   (a) $x\cdot y$ (b) $x\cdot z$ (c) $y\cdot z$ (d) $x\cdot y\cdot z$

2. Nabrojati zakone Bulove algebre.

3. Da li su logički izrazi $A+\overline{B}$ i $AB+\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}$ ekvivalentni?

4. Transformisati logički izraz $(A+(B(\overline{C+D})))E$ u zbir proizboda.

5. Koje su osnovne logičke operacije? Nacrtati šeme kojima se osnovne logičke operacije realizuju pomoću NILI kola.

6. Formirati strukturnu šemu na osnovu analitičkog izraza

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$$

7. Korišćenjem logičkih NI kola sačiniti

   (a) invertor
   (b) dvoulazni I kolo
   (c) dvoulazno ILI kolo

   (d) isključivo ILI kolo

8. Pokazati da je

$$(a+\overline{b}+\overline{c})(a+\overline{b}\,c) = a+b\overline{c}$$

9. Nacrtati Karnoovu mapu za sledeće funkcije

   (a) $f_1(x,y,z) = \overline{x}\,\overline{y}+x\overline{z}+\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}+xyz+xy$

   (b) $f_2(x,y,z) = y(z+x\overline{z})+x\overline{y}\,\overline{z}$

10. Proveriti da li su sledeće prekidačke funkcije

$$f_1(x,y,z) = xy+yz+x\overline{z}+\overline{x}\,\overline{y}$$
$$f_2(x,y,z) = xy+\overline{x}\,\overline{y}+\overline{x}yz$$

   jednake.

11. Proširiti logičku funkciju

$$f(x,y,z) = xy+x\overline{z}+xz$$

   u obliku potpune standardne forme sume proizvoda.

12. Proširiti sledeću logičku funkciju u obliku standardne forme proizvoda suma

$$f(x,y,z) = (x+y)(\overline{x}+z)$$

13. Uprostiti sledeću logičku funkciju

$$Z = \overline{(\overline{A}+C)(B+\overline{D})}$$

14. Koristeći Karnoovu tablicu minimizirati sledeće prekidačke funkcije

   (a) $f_a(x_1,x_2,x_3,x_4) = \ (0,2,5,9,11)$

   (b) $f_b(x_1,x_2,x_3,x_4) = \ (0,2,5,7,8,10,13,15)$

   (c) $f_c(x_1,x_2,x_3,x_4) = \ (0,1,4,5,7,8,9,12,13,15)$

   (e) $f_d(x_1,x_2,x_3,x_4) = \ (0,3,6,11,12,13,14)$

   (f) $f_e(x_1,x_2,x_3,x_4) = \ (4,8,9,10,11,12,14,15)$

   (f) $f_f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \ (1,4,5,10,12,14)$

   (f) $f_g(x_1,x_2,x_3,x_4) = \ (0,2,3,6,7,10,11)$

15. Logička funkcija $F(A,B,C)$ je zadata kombinacionom tabelom 3.4.

Tab. 3.4: Kombinaciona tabela

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

a) Napisati izraz za zadatu funkciju u obliku zbira potpunih proizvoda (disjuktivna normalna forma) kao i u obliku proizvoda potpunih zbirova (konjuktivna normalna forma).

b) Uprostiti dobijene izraze i nacrtati logičke mreže koje ih realizuju. Pokazati da je sa gledišta broja logičkih elemenata konjuktivna forma funkcije jednostavnija za realizaciju.

16. Realizovati logičku funkciju

$$Z = \overline{(A+B)} + BC + A\overline{B}\overline{C}.$$

Na raspolaganju stoje samo logička kola I i ILI sa dva ulaza, kao i NE kola.

17. Nacrtati logičko kolo kojim se implementira prekidačka funkcija

$$Z = \overline{A}BC\overline{(A+D)}$$

korišćenjem logičkih kola I, ILI i NE sa najviše tri ulaza.

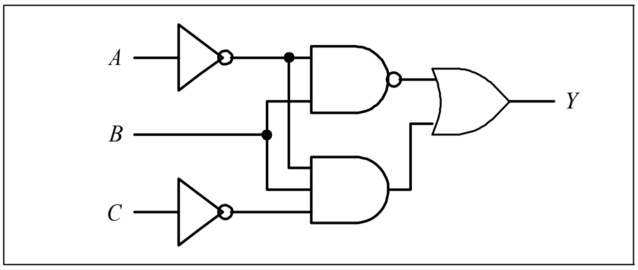
18. Za logičko kolo, prikazano na slici 3.25, odrediti prekidačku funkciju $Y = f(A,B,C)$, a zatim formirati kombinaacionu tabelu. Primenom Karnoove tablice minimizirati funkciju.

19. Koristeći sledeću kombinacionu tabelu izraziti logičke funkcije B i D kao

(a) zibir mintermova
(b) proizvod makstermova

20. Dato je logičko kolo prikazano na Slici 3.26(a).

(a) Napisati logičku funkciju za dato kolo.

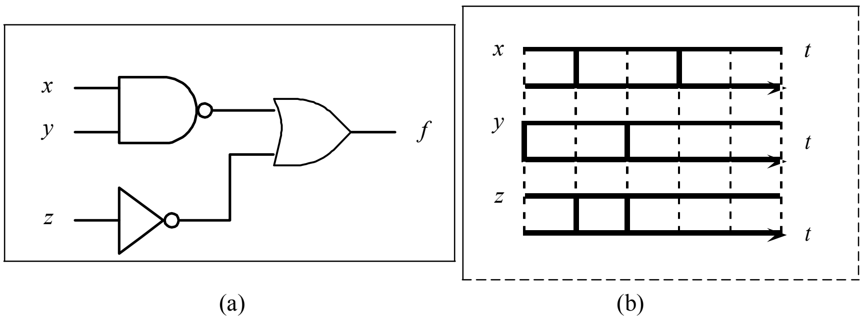


Sl. 3.25: Logički dijagram

Ulaz			Izlaz	
X	*Y*	*Z*	*D*	*B*
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

(b) Formirati kombinacionu tablicu za dato kolo, a zatim predstavit logičku funkciju u vidu skupa indeksa.

(c) Nacrtati oblik signala na izlazu logičkog kola za ulazne signale prikazane na Slici 3.26(b).



Sl. 3.26: Logičko kolo (a) i ulazni sihnali (b).