Prof. dr Siniša G. Minić

INFORMACIONE TEHNOLOGIJE

LEPOSAVIĆ, 2015.

4. Zakon absorpcije

$$\begin{aligned}A+A\cdot B &= A\\ A\cdot(A+B) &= A\\ A+\overline{A}\cdot B &= A+B\\ A\cdot(\overline{A}+B) &= A\cdot B\\ (A\cdot B)+(A\cdot\overline{B}) &= A\\ (A+B)\cdot(A+\overline{B}) &= A\end{aligned} \tag{3.7}$$

Svi ovi zakoni mogu se lako dokazati direktnom primenom definicionih relacija za tri osnovne operacije, odnosno ipisivanjem kombinacionih tabela za obe strane jednakosti.

Osim navedenih zakona vrlo važnu ulogu u Bulovoj algebri imaju tzv. DE Morganove teoreme

$$\begin{aligned}\overline{A+B} &= \overline{A}\cdot\overline{B}\\ \overline{A\cdot B} &= \overline{A}+\overline{B}\end{aligned} \tag{3.8}$$

koje se mogu dokazati ispisivanjem kombinacionih tablica za leve i desne strane jedakosti (3.8).

Teoreme Bulove algebre sa n promenljivih.

$$X+X+\ldots+X=X \tag{3.9}$$

$$X\cdot X\cdot\ldots\cdot X=X \tag{3.10}$$

$$\overline{(X_1\cdot X_2\cdot\ldots\cdot X_n)}=\overline{X}_1+\overline{X}_2+\ldots+X_n \tag{3.11}$$

$$\overline{(X_1+X_2+\ldots+X_n)}=\overline{X}_1\cdot\overline{X}_2\cdot\ldots\cdot X_n \tag{3.12}$$

$$\overline{F}(X_1,X_2,\ldots,X_n,+,\cdot)=F(\overline{X}_1,\overline{X}_2,\ldots,X_n,\cdot,+) \tag{3.13}$$

$$F(X_1,X_2,\ldots,X_n)=X_1\cdot F(1,X_2,\ldots,X_n)+X_1\cdot F(0,X_2,\ldots,X_n) \tag{3.14}$$

$$F(X_1,X_2,\ldots,X_n)=[X_1+F(0,X_2,\ldots,X_n)]\cdot[X_1+F(1,X_2,\ldots,X_n)] \tag{3.15}$$

Teorema (3.13) pokazuje da se komplement bilo kog logičkoh izraza dobija tako što se logička operacija ILI zameni logičkom operacijom I, i obrnuto, a zatim se sve promenlive komplementiraju. Posmatrajmo funkciju sa četiri promenljive W,X,Y,Z

$$F(W,X,Y,Z)=\overline{W}\cdot X+X\cdot Y+W\cdot(\overline{X}+\overline{Z})$$

Primenom Teoreme (3.13) dobija se

$$\overline{F}(W,X,Y,Z)=(W+\overline{X})\cdot(\overline{X}+\overline{Y})\cdot(\overline{W}+(X\cdot Z)$$

Primer 3.1

$$\begin{aligned} xy+x\bar{y}z+\bar{x}yz &= x(y+\bar{y}z)+\bar{x}yz \\ &= x(y+z)+\bar{x}yz \\ &= xy+xz+\bar{x}yz \\ &= y(x+\bar{x}z)+xz \\ &= y(x+z)+xz \\ &= xy+xz+yz \end{aligned}$$

3.2 Osnovne logičke opercije

U Bulovoj algebri definisana je relacija ekvivalencije "=" i tri osnovne operacije nad logičkim promenljivama. To su I operacija (engl. AND) ili logičko množenje koja se označava simbolom "·", ILI operacija (engl. OR) ili logičko sabiranje koja se označava simbolom "+" i NE operacija (engl. NOT) ili komplementiranje koja se označava crticom iznad simbola promenljive. I i ILI operacija se izvode nad najmanje dve promenljive, dok je NE operacija unarna , tj. izvodi se nad jednom promenljivom.

Za sve elemente Bulove algebre relacija ekvivalencije poseduje sledeće osobine: refleksivnost ($a = a$), simetričnost (ako je $a = b$ tada je i $b = a$) i tranzitivnost (ako je $a = b$ i $b = c$ tada je i $a = c$).

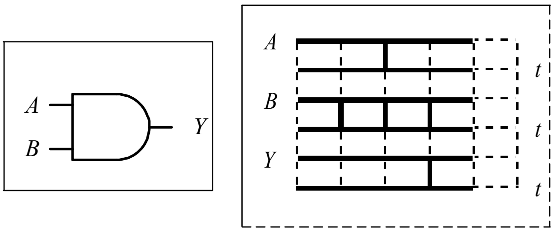
3.2.1 Logička I operacija

Posmatrajmo najpre I funkciju dve logučke promenljive A i B. Rezultat logičke I operacije se najčešće prikazuje u vidu tzv. kombinacione tablice ili tablice istinitosti koja koja je prikazana na Slici 3.2(a). Na Slici 3.2(b) prikazan je grafički simbolza predstavljanje logičke I operacije.

Kao što se iz kombinacione tablice vidi, osnovna osobina I operacije nad dve promenljive A i B je da se kao rezultat dobija logička jedinica, ako i samo ako obe promenljive imaju vrednost logičke jedinice. Zato se ponekad I operacija naziva i logičko množenje: $Y = A \cdot B$. Na Slici 3.2(c) prikazani su oblici napona na njegovim ulazima i izlazu.

Logičko I kola se koristi pre svega kao kontrolni element. Može se uočiti da se pomoću jednog ulaza reguliše prenos ulaznih vrednosti signala s drugih ulaza na izlaz.

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



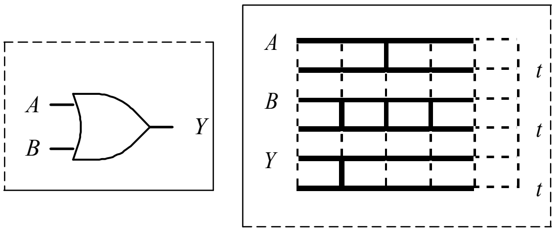
(a) (b) (c)

Sl. 3.2: Kombinaciona tablica (a), grafički simbol (b) i vremenski dijagrami (c), za logičku I operaciju

3.2.2 Logička ILI operacija

Logička ILI operacija nad dve logičke promenljive A i B prikazana je kombinacionom tablicom na Slici 3.3. Na istoj slici je prikazan je i najčeshće korishćeni grafički simbol za predstavljanje ILI operacije. Vidi se da se kao rezultat dobija logička jedinica ako bar jedna promenljiva ima vrednost logičke jedinice. Zato se ponekad ILI operacija naziva i logičko sabiranje.

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



(a) (b) (c)

Sl. 3.3: Kombinaciona tablica (a), grafički simbol (b) i vremenski dijagrami (c), za logičku ILI operaciju.

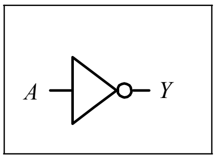
Kao što se iz kombinacione tablice vidi, osnovna osobina ILI operacije nad dve promenljive A i B je da se kao rezultat dobija logička jedinica, ako i samo ako bar jedna promenljiva ima vrednost logičke jedinice. Zato se ponekad ILI operacija naziva i logičko sabiranje: $Y = A + B$. Na Slici 3.3(c) prikazani su oblici napona na njegovim ulazima i izlazu.

3.2.3 NE operacija

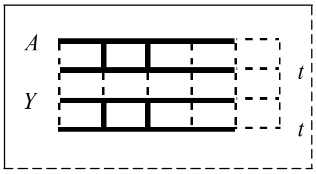
Za razliku od I i ILI operacije, NE operacija se definishe nad jednom logičkom promenljivom ili izrazom. Kombinacion tablica za NE operaciju i graficki simbol za predstavljanje NE operacije prikazani su na Slici 3.4. NE operacija se često naziva i komplementiranje: $Y = \overline{A}$.

A	Y
0	1
1	0

(a)



(b)



(c)

Sl. 3.4: Kombinaciona tablica (a), grafički simbol (c), za logičku operaciju NE.

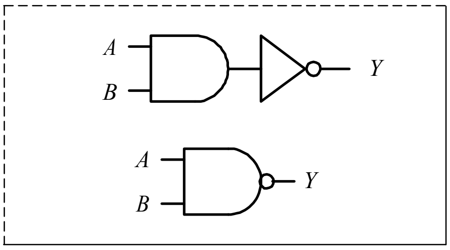
3.3 Ostale logičke operacije

Kombinacijom tri osnovne logičke operacije koje su opisane u predhodnom izlaganju mogu se dobiti josh neke vrlo važne i korisne logičke operacije. Kombinacijom I i NE operacije dobija se NI (engl. NAND) operacija, a kombinacijom ILI i NE operacije dobija se NILI (engl. NOR) operacija. Osim njih praktičnu primenu imaju josh i operacija isključivo ILI i operacija koincidencije.

3.3.1 NI operacija

Ni operacija se dobija kobinovanjem I i NE operacije, odnosno kaskadnom spregom I i Ne kola kao što je prikazano na Slici 3.5. Na istoj slici je prikazan i grafički simbol koji zamenjuje kaskadnu spregu I i Ne kola. Prema tome kombinaciona tablica za NI operaciju dobija se teko shto se u kombinacionoj tablici za za I operaciju sa Slike 3.2 kompementira izlazna kolona Y. Rezultat je prikazan na Slici 3.5. Na istoj Slici je prikazan i grafički simbol za NI operaciju koji je takodje kombinacija simbola za I i NE operaciju.

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



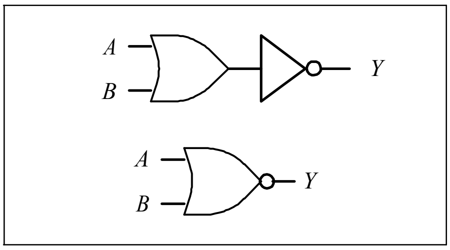
Sl. 3.5: Kombinaciona tablica i grafički simbol za NI operaciju

U Bulovoj algebri se definishe tzv. potpuni skup operacija. To je skup operacija pomoću kojih se može izraziti bilo koja logička funkcija. Može se pokazati da takav potpuni skup čine I i NE odnosno ILI i NE operacije. Dakle, NI operacija takodje čini potpuni skup operacija, odnosno, proizvoljna logička funkcija se može izraziti samo pomoću NI operaija. Ova činjenica daje veliku vaznost NI operaciji.

3.3.2 NILI operacija

NILI operacija dobijena je komplementiranjem rezultata ILI operacije. Komplementiranje rezultata ili operacije se postiv ze kaskodnom vezom ILI i I logičkih kola, kao što je prikazano na Slici 3.6. Kombinaciona tablica i grafički simbol za NILI operaciju prikazani su na Slici 3.6. Treba reći da i NILI operacija predstavlja potpun skup za realizaciju logičkih funkcija.

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Sl. 3.6: Kombinaciona tablica i grafički simbol za NILI operaciju

3.3.3 Isključivo-ILI operacija

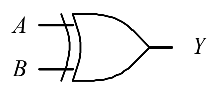
Isključivo ILI operacija (engl. Exclusive-OR) se razlikuje od obične ILI opericije po tome shto daje kao rezultat logičku nulu i u slučaju kad su obe promenljive logičke jedinice. Kobinaciona tablica i grefički simbol za isključivo-ILI operaciju prikazani su na Slici 3.7. U jednačinama se za označavanje isključivo-ILI operacije najčeshće koristi simbol "$\oplus$". Na osnovu kombinacione tablice može se napisati logička jednačina za isključivo-ILI funkciju

$$Y = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = A \oplus B \tag{3.16}$$

3.3.4 Isključivo-NILI operacija

Operacija koincidencije daje kao rezultat logičku jedinicu ako su obe promenljive identične. Na osnovu toga se može napisati kombinaciona tabela koja je prikazana

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



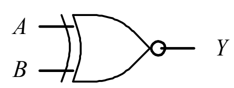
Sl. 3.7: Kombinaciona tablica i grafički simbol za isključivo-ILI operaciju

na Slici 3.8. Na osnovu logičke jednačine koja definishe operaciju koincidencije

$$Y = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A \oplus B} \tag{3.17}$$

vidi se da je rezultat ustvari komplement isključivo-ILI operacije. Zbog toga se operacija koincidencije naziva i isključivo-NILI operacija.

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

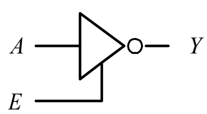


Sl. 3.8: Kombinaciona tablica i grafički simbol za isključivo-NILI operaciju

3.3.5 Logika sa tri stanja

Logičko kolo sa tri stanja karakteriše stanjem visoke impedanse kao normalne vrednosti na izlazu, pored uobičajenih vrednosti nule i jedinice. Logička kola sa tri stanja izvode se u većem broju varijanti. Tipična varijanta prikazan je na Slici 3.9.

A	E	Y
0	0	Z
0	1	1
1	0	Z
1	1	0



Sl. 3.9: Kombinaciona tablica (a) i grafički simbol za inventor sa tri stanja i *enable* linijom (b).

Upravljački ulaz E na naziva se *enable* signal. Kada je $E = 1$ tada je $Y = \overline{X}$, a za $E = 0$ imamo $Y = Z$, odnosno sanje visoke impedanse.