Prof. dr Siniša G. Minić

INFORMACIONE TEHNOLOGIJE

Leposavić, 2015.

3.4 Predstavljanje logičkih funkcija

Logičke funkcije se mogu definisati nad proizvoljnim brojem promenljivih. Postavlja se pitanje koliko se različitih funkcija može definisati nad skupom od n promenljivih. Pre svega, kombinaciona tablica ima $m = 2^n$ različithi vrsta. Kako se za svaku kombinacionu tablicu sa m vrsta može definisati 2^m različitih kolona za izlaznu promenljivu, broj različitih logičkih funkcija definisanih nad skupom od n promenljivih iznosui 2^{2^n}. Kao primer, za $n = 2$ može se definisati 16 različitih logičkih funkcija.

Izlazni skup Z kombinacione mreže jednoznačno je određen ulaznim skupom X promenljivih koji je u posmatranom trenutku prisutan na ulazima mreže. Stoga je funkcija kombinacione mreže definisana ako je zadata korespondencija između ulaznog skupa X i izlaznog skupa Z. Ta korespondencija se može zadati skupom prekidačkih funkcija $z_1, z_2, \ldots, z_m$ koje zavise od nezavisno promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i data je relacijama

$$\begin{aligned} z_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ z_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &. \\ z_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Logičke funkcije mogu se predstaviti na različite načine, a to su:

- šematsko prikazivanje pomoću logičkih kola,
- tabelarno, pomoću tablica istinitosti,
- algebarsko, pomoću osnovnih logičkih funkcija.

Sve logičke funkcije analitički se mogu prikazati u dva oblika:

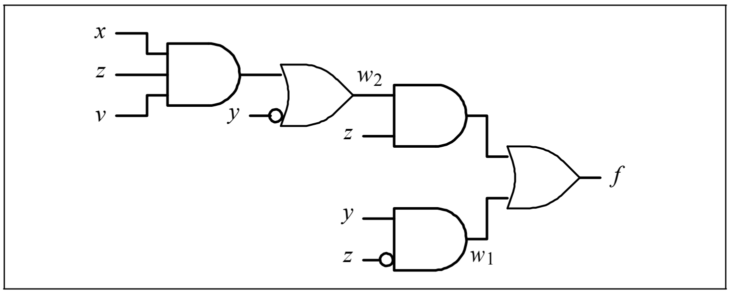
- disjunktivna forma, koja predstavlja logičku sumu logičkih proizvoda,
- konjunktivna forma, koja predstavlja logički proizvod logičkih suma.

Ako je funkcija prikazana tabelarno, može se odrediti njen analitički oblik kao disjunktivna ili konjunktivna forma, pri čemu se za određivanje disjunktivne forme grupišu elementi koji odgovaraju jedinici, tj. za koje je vrednost funkcije jednaka logičkoj jedinici, dok se za konjunktivnu formu grupišu elementi koji odgovaraju nulama funkcije. Mada postoje dva standardna načina ovog prevođenja, ovde ćemo razmotriti samo jedan od njih, a drugi se realizuje po analogiji. Taj algoritam definiše logički izraz funkcije u obliku disjunktivne normalne forme (DNF), a sastoji se od sledećih koraka:

a) prvo se za sve vrednosti funkcije $F = 1$ pravi konjunkcija logičkih promenljivih i to samih promenljivih ukoliko je njihova vrednost u tom slučaju jednaka 1, odnosno negacija promenqivih ako je njihova vrednost jednaka 0. Na primer, za broj 3 je $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, pa je njoj odgovarajuća konjunkcija $\bar{x}_1x_2x_3$.
b) kada su formirane sve konjunkcije za vrednosti $F = 1$, onda se one povezuju operatorom disjunkcije $(+)$ i na taj način se dobija disjunktivna normalna forma date funkcije F.

Kombinovanjem logičkih kola mogu se realizovati proizvoljne logičke funkcije. Skup operacija [I, ILI, NE] predstavlja osnovu za generisanje logičkih funkcija. No, operacija I se može realizovati pomoću operacije ne i ILI, pa skup skup [NE, ILI] takođe čini bazu logičkog sistema. Može se jednostavno pokazati da i skip [NE, I] takođe čini bazu logičkog sistema.

Primer 3.2 *Formirati Bulovu funkciju koja opisuje sledeće logičko kolo sa četiri ulaza: x, y, z i v.*



Sl. 3.10: Logičko kolo sa četiri ulaza x, y, z i v.

Na slici su uvedene oznake međurezultata logičkih operacija: w_1 i w_2. Idući od desnog kraja šeme (izlaz iz kola) prema ulazima, izračunava se

$$f = w_1 + z w_2$$
$$w_1 = y\bar{z}$$
$$w_2 = xzv + \bar{y}$$

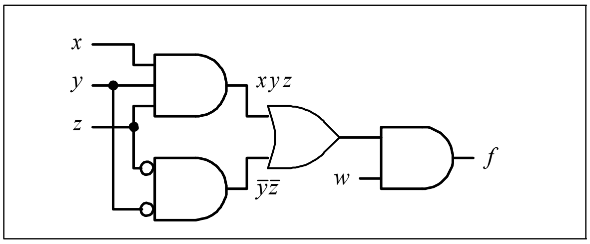
Smenom izraza za w_1 i w_2 u izraz za f dobija se konačno

$$f = y\bar{z} + z(\bar{y} + xzv) = y\bar{z} + z\bar{y} + xzv$$
$$f = y\bar{z} + z(\bar{y} + xv)$$

Primer 3.3 *Formirati logičko kolo koje generiše Bulovu funkciju*

$$f(x,y,z,w) = w(xyz + \overline{y}\overline{z})$$

Na Slici 3.11 prikazano je logičko kolo.



Sl. 3.11: Logičko kolo sa četiri ulaza x, y, z i w.

Drugi način predstavljanja je već korišćen kod definisanja elementarnih logičkih operacija, a to je *kombinaciona tablica*. Ovaj način nije pogodan ako je broj promenljivih veliki, zato što broj vrsta tablice raste kao stepen broja dva.

Jedan od najčešćih načina je predstavljanja je *algebarski* način. Kod takvog prikaza se logička funkcija predstavlja u vidu izraza koji čine simboli promenljivih (literali) povezanih simbolima I i ILI operacije. Ovaj način predstavljanja je pogodan za bilo koji broj logičkih promenljivih.

Algebarska predstava logičkih funkcija obično se izvodi u vidu tzv. standardnih formi. Suma proizvoda predstavlja logički zbir članova koji su u obliku logičkih proizvoda. Ako logički proizvodi sadrže sve promenljive, takva se standardna forma naziva potpuna forma ili disjuktivna normalna forma. Svaki takav potpuni logički proizvod odgovara jednoj vrsti kombinacione tablice u kojoj logička funkcija ima vrednost jedan.

Ako se formira logički proizvod članova koji su u obliku logičkog zbira promenljivih, reč je o tzv. proizvodu suma, a takva standardna forma se naziva konjuktivna normalna forma. Svaki potpuni logički zbir odgovara jednoj vrsti kombinacione tablice u kojoj logička funkcija ima vrednost jednaku nuli.

Kod obe alternativne forme svaka promenljiva se javlja bilo u komplementiranom ili nekomplementiranom obliku u svakom od članova tipa proizvoda ili zbira. Svaki član tipa proizvoda koji ima ovu osobinu naziva se *minterm* i označava se sa m_i, $0 \leq i \leq 2^{n-1}$, dok svaki član sume proizvoda koji ima ovu osobinu naziva se *maksterm* i označava sa M_i, $0 \leq i \leq 2^{n-1}$. n je broj promenljivih Bulove funkcije.

Za svaku Bulovu funkciju koja je u potpunosti komponovana od mintermova kažemo da kanoničnu formu tipa zbira proizvoda. Ako je Bulova funkcija u potpunosti komponovana od makstermova, tada kažemo da ima kanoničnu formu tipa proizvoda suma. Kod Bulove funkcije od n promenljivih postoji 2^n mintermova, odnosno 2^n makstermova.

Lako je uočiti da komplement bilo kog minterma predstavlja maksterm i obrnuto. U Tabeli 3.1 prikazani su mintermovi i makstermovi za Bulovu funkciju od tri promenljive $F(x_1, x_2, x_3)$

Tab. 3.1: Mintermovi i makstermovi za Bulovu funkciju od tri promenljive.

dec. br.	x_1	x_2	x_3	Minterm	Oznaka	Maksterm	Oznaka
0	0	0	0	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	m_0	$x_1+x_2+x_3$	M_0
1	0	0	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	m_1	$x_1+x_2+\bar{x}_3$	M_1
2	0	1	0	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	m_2	$x_1+\bar{x}_2+x_3$	M_2
3	0	1	1	$\bar{x}_1x_2x_3$	m_3	$x_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3$	M_3
4	1	0	0	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	m_4	$\bar{x}_1+x_2+x_3$	M_4
5	1	0	1	$x_1\bar{x}_2x_3$	m_5	$\bar{x}_1+x_2+\bar{x}_3$	M_5
6	1	1	0	$x_1x_2\bar{x}_3$	m_6	$\bar{x}_1+\bar{x}_2+x_3$	M_6
7	1	1	1	$x_1x_2x_3$	m_7	$\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3$	M_7

Komplement Bulove funkcije čine mintermovi čija je vrednost jenaka nuli. Neka je logička funkcija f_1 predstavljena u obliku zbira mintermova

$$f_1 = \bar{x}\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz = m_1 + m_4 + m_7,$$

tada njen komplement čine preostali mintermovi

$$\begin{aligned}\overline{f}_1 &= m_0 + m_2 + m_3 + m_5 + m_6 \\ &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z}.\end{aligned}$$

Pošto je $f_1 = \overline{(\overline{f}_1)}$ dobija se f_1 u obliku proizvoda makstermova.

$$\begin{aligned}f_1 = \overline{(\overline{f}_1)} &= (x+y+z)(x+\bar{y}+z)(x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z) \\ &= M_0M_2M_3M_5M_6\end{aligned}$$

Primer 3.4 *Logičku funkciju zadatu kombinacionom tablicom 3.2 predstaviti u obliku kanonične forme sume proizvoda i kanonične forme proizvoda suma.*

Suma proizvoda

$$F = \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3$$

Proizvod suma

$$F = (x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+\bar{x}_3)(x_1+\bar{x}_2+x_3)(\bar{x}_1+x_2+\bar{x}_3)$$

Tab. 3.2: Kombinacona tablica za Primer 3.4.

dec. br.	x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Za Bulovu funkciju koja je u potpunosti komponovana od mintermova ili makstermova kaže se da ima kanoničnu normalnu formu. Ukoliko to nije slučaj naziva se *Disjuktivna normalna forma* ako je predstavljena u obliku sume proizvoda, odnosno *konjuktivna normalna forma* ako je predstavljena u obliku proizvoda suma. Napomenimo da se svaka predidačka funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ može se na jedinsven način napisati u obliku kanonične normalne forme.

Transformisanje disjuktivne normalne forme u kanoničnu disjuktivnu normalnu formu se zasniva na razvijanju svih elementarnih proizvoda u zadatoj disjuktivnoj normalnoj formi do potpunih proizvoda i eliminaciji suvišnih članova. Transformisanje konjuktivne normalne forme u kanoničnu nonjuktivnu normalnu formu se zasniva na razvijanju svih elementarnih suma u zadatoj konjuktivnij normalnoj formi do potpunih suma i eliminaciji suvišnih članova.

Na primer, transformacija disjuktivne normalne forme u kanoničnu disjuktivnu normalnu formu može se izvršiti na sledeći nači.

$$\begin{aligned}F(A,B,C) &= A + \overline{B}C \\ &= A(B+\overline{B}) + \overline{B}C \\ &= AB + A\overline{B} + \overline{B}C \\ &= AB(C+\overline{C}) + A\overline{B}(C+\overline{C}) + (A+\overline{A})\overline{B}C \\ &= ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C\end{aligned} \tag{3.19}$$

Dakle, kanonična disjuktivna normalna forma funkcije $F(A,B,C)$ komponovana od mintermova ima oblik

$$\begin{aligned}F(A,B,C) &= \overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC \\ &= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7\end{aligned} \tag{3.20}$$

Jednačina (3.20) predstavlja kanoničnu disjuktivnu normalnu formu funkcije $F(A,B,C)$ od tri promenlive jer je u potpunosti komponovana od mintermova.

Primer 3.5 *Proširiti sledeću Bulovu funkciju funkciju datu u formi nekanoničnog proizvoda suma* $f(x,y,z) = (x+y)(\overline{x}+z)$.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+y+z\overline{z})(\overline{x}+y\overline{y}+z) \\ &= (x+y+z)(x+y+\overline{z})(\overline{x}+y+z)(\overline{x}+\overline{y}+z) \\ &= M_0 M_1 M_4 M_6 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Primer 3.6 *Izvršiti konverziju funkcije* $F = xy+\overline{x}z$ *u proizvod makstermova.*

$$\begin{aligned} F &= xy+\overline{x}z \\ &= (xy+\overline{x})(xy+z) && : \text{Zakon distribucije} \\ &= (x+\overline{x})(y+\overline{x})(x+z)(y+z) && : \text{Zakon distribucije} \\ &= (\overline{x}+y)(x+z)(y+z). && : x+\overline{x} = 1 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Pošto je $\overline{x}+y = \overline{x}+y+z\overline{z}$, $x+z = x+z+y\overline{y}$ *i* $y+z = y+z+x\overline{x}$ *dobija se*[1]

$$\begin{aligned} F &= (x+y+z)(x+\overline{y}+z)(\overline{x}+y+z)(\overline{x}+y+\overline{z}) : \textit{Zakon distribucije} \\ &= M_0 M_2 M_4 M_5. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Treći način koji je pogodniji ako je broj promenljivih veliki je predstavljanje pomoću *skupa indeksa*. Naime, svakoj vrsti kombinacione tablice može se pridružiti indeks koji predstavlja decimalni ekvivalent binarnog broja ispisanog u toj vrsti. Zatim se formira skup indeksa vrsta gde funkcija ima vrednost 0 ili 1. Na primer isključivo-ILI operacija se može definisatina sledeće načine $Y = \quad (1,2)$ ili $Y = \quad (0,3)$.

Primer 3.7 *Funkcija*

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) = &\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_4 + x_1 \overline{x}_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \\ &+ \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 + x_1 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4 + \overline{x}_1 x_2 x_3 x_4 \end{aligned}$$

može se predstaviti u vidu skupa decimalnih indeksa na sledeći način

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \quad (5,11,12,0,10,7)$$

Primer 3.8 *Logička funkcija* $f(x_1,x_2,x_3)$ *zadata je skupom decimalnih indeksa* $f^{(1)} = \quad (2,3,5,6)$, *napisati je u obliku kanonične disjuktivne forme i u obliku kanonične konjuktivne forme.*

Kanonična disjuktivna forma

$$f = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \overline{x}_3$$

[1] $x\overline{x} = y\overline{y} = z\overline{z} = 0$