СКУПОВИ (задаци)

25.3.2020.год.

1. Нека је $A=\{1,2,5\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{3,4\}$. Одредити:
   а) $A\times B\times C$
   б) B^3
   ц) A^2
   д) Δ_A.

   Решење:

   а) Како је $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$ скуп уређених парова, тако је $A\times B\times C$ скуп уређених „тројки" (a,b,c) таквих да је први елемент *a* елеменат првог скупа *A*, други елемент *b* елемент другог скупа *B*, трећи елемент *c* елемент трећег скупа *C*.

$$A\times B\times C=\{(a,b,c)\mid a\in A, b\in B, c\in C\}=\{(1,2,3),(1,2,4),(1,3,3),(1,3,4),(2,2,3),(2,2,4)\\ (2,3,3),(2,3,4),(5,2,3),(5,2,4),(5,3,3),(5,3,4)\}$$

   b) $B^3=B\times B\times B=\{(2,2,2),(2,2,3),(2,3,2),(2,3,3),(3,2,2),(3,2,3),(3,3,2),(3,3,3)\}$.

   ц) $A^2=A\times A=\{(a,b)\mid a,b\in A\}=\{(1,1),(1,2),(1,5),(2,1),(2,2),(2,5),(5,1),(5,2),(5,5)\}$.

   д) $\Delta_A=\{(a,a)\mid a\in A\}=\{(1,1),(2,2),(5,5)\}$.

2. Дат је скуп $A=\{x\mid x\in N\wedge 4x-2(3x-9)\le -4(2x-9)\}$ и скуп $B=\left\{x\mid x<17\wedge \frac{x}{6}-\frac{1-x}{4}>\frac{1+x}{3}+\frac{x-2}{24}\right\}$. Одредити а) $(A\Delta B)\setminus B$ и б) $P(A)$.

   Решење:

$$\begin{aligned}&4x-2(3x-9)\le -4(2x-9)\\&4x-6x+18\le -8x+36\\&4x-6x+8x\le -18+36\\&6x\le 18\\&x\le \frac{18}{6}\\&x\le 3\end{aligned}$$

Онда је $A=\{x\mid x\in N\wedge x\le 3\}=\{1,2,3\}$

$$\frac{x}{6}-\frac{1-x}{4}>\frac{1+x}{3}+\frac{x-2}{24}$$
$$4x-6(1-x)>8(1+x)+(x-2)$$
$$4x-6+6x>8+8x+x-2$$
$$4x+6x-8x-x>6+8-2$$
$$x>12$$

Онда је $B=\{x \mid x<17 \wedge x>12\}=\{13,14,15,16\}$

а) $A \setminus B=\{1,2,3\}$

$B \setminus A=\{13,14,15,16\}$

$A \Delta B=(A \setminus B) \cup (B \setminus A)=\{1,2,3,13,14,15,16\}$

$(A \Delta B) \setminus B=\{1,2,3,13,14,15,16\} \setminus \{13,14,15,16\}=\{1,2,3\}$

б) $P(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ $2^3=8$ елемената партитивног скупа.

3. Нека је :

$A=\{x \mid x \in N \wedge (x^2-1)=0\}$

$B=\left\{y \mid y \in N \wedge y \leq 16 \wedge \left(\frac{y}{5}-1\right) \in N\right\}$

$C=\{z \mid z \in N_0 \wedge 1-(1-z)^2=0\}$

Одредити:

а) $A \times B \times C$

б) $C_s A$ где је $S=A \cup B \cup C$

ц) $(A \cup C) \setminus (A \cap B)$.

Решење: Одредимо елементе скупа А, како је:

$$x^2-1=0$$
$$x^2=1$$
$$x=\pm\sqrt{1} \qquad A=\{1\}$$
$$x_1=1 \in N$$
$$x_2=-1 \notin N$$

Елементи скупа А су само природни бројеви, што значи да узимамо у обзир само решење $x_1 = 1$.

Сада одређујемо елементе скупа В тако што све природне бројеве мање и једнаке броју 16 замењујемо у израз $\left(\frac{y}{5} - 1\right)$. Решења овог израза која су природни бројеви су елементи скупа В.

$$y = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{5} - 1\right) = \left(\frac{1-5}{5}\right) = \frac{-4}{5} \notin N;$$
$$y = 2 \Rightarrow \left(\frac{2}{5} - 1\right) = \left(\frac{2-5}{5}\right) = \frac{-3}{5} \notin N;$$

.

.

.

$$y = 10 \Rightarrow \left(\frac{10}{5} - 1\right) = 2 - 1 = 1 \in N \Rightarrow y = 10 \in B$$
$$y = 15 \Rightarrow \left(\frac{15}{5} - 1\right) = 3 - 1 = 2 \in N \Rightarrow y = 15 \in B$$

Ово значи да је $B = \{10, 15\}$

Сада одређујемо елементе скупа С.

$$1 - (1 - z)^2 = 0$$
$$1 - (1 - 2z + z^2) = 0$$
$$1 - 1 + 2z - z^2 = 0$$
$$2z - z^2 = 0$$
$$z(2 - z) = 0$$
$$z_1 = 0 \wedge 2 - z = 0$$
$$z_1 = 0 \wedge z_2 = 2$$

Kako је $z \in N_0$ то значи да у обзир узимамо оба решења што заначи да је $C = \{0, 2\}$.

а) $A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$
$= \{(1,10,0), (1,10,2), (1,15,0), (1,15,2)\}$.

б) $S = A \cup B \cup C = \{0,1,2,10,15\}$

$C_s A = S \setminus A = \{0,1,2,10,15\} \setminus \{1\} = \{0,2,10,15\}$

ц) $A \cup C = \{0,1,2\}, \quad A \cap B = \phi$

$(A \cup C) \setminus (A \cap B) = \{0,1,2\} \setminus \phi = \{0,1,2\}$.

4. Дати су скупови:
   $A = \{x \mid x \in N \wedge x^2 - 5x + 6 = 0\}$;
   $B = \{y \mid y \in N \wedge 2 \le y < 12 \wedge y$ је паран број$\}$. Одредити:
   а) $P(B)$
   б) $(A \cup (B \setminus (B \cap A)))$
   ц) $B \times A$

Решење:

Да бисмо одредили елементе скупа А потребно је решити квадратну једначину $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1/2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Оба решења су природни бројеви што значи да је $A = \{2,3\}$.

Елементи скупа B су природни, парни бројеви између бројева 2 и 12 (број 2 се узима у обзир јер је знак $\le$ док се број 12 не узима у обзир због знака <. Из свега се изводи закључак да је $B = \{2,4,6,8,10\}$.

а)

$$P(B) = \left\{ \begin{array}{l} \phi, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}, \{10\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{2,8\}, \{2,10\}, \{4,6\}, \{4,8\}, \{4,10\}, \{6,8\}, \{6,10\}, \\ \{8,10\}, \{2,4,6\}, \{2,4,8\}, \{2,4,10\}, \{4,6,8\}, \{4,6,10\}, \{6,8,10\}, \{2,6,8\}, \{2,6,10\}, \{2,8,10\}, \\ \{4,6,10\}, \{4,8,10\}, \{2,4,6,8\}, \{2,4,6,10\}, \{2,6,8,10\}, \{4,6,8,10\}, \{2,4,6,8,10\} \end{array} \right\}$$

Елементи партитивног скупа су подскупови (подскупови су такође врста скупа) из тог разлога се елементи партитивног скупа пису у великим заградама {}.

б) $B \cap A = \{2\}$

$B \setminus (B \cap A) = \{2,4,6,8,10\} \setminus \{2\} = \{4,6,8,10\}$

$(A \cup (B \setminus (B \cap A))) = \{2,3\} \cup \{4,6,8,10\} = \{2,3,4,6,8,10\}$

Код задатака са већим бројем заграда $(A \cup (B \setminus (B \cap A)))$ прво се решава најмања заграда $B \cap A$, затим средња заграда $(B \setminus (B \cap A))$, и на крају највећа заграда $(A \cup (B \setminus (B \cap A)))$.

ц) $B \times A = \{(2,2),(2,3),(4,2),(4,3),(6,2),(6,3),(8,2),(8,3),(10,2),(10,3)\}$

Елементи Декартовог производа су уређени парови који се пишу у малим заградама (,). Код овог задатка имамо $B \times A$ што значи да је први елеменат уређеног пара из скупа B, а други елеменат из уређеног пара је из скупа A.