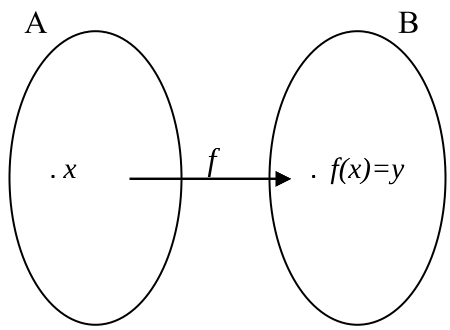
ПРЕСЛИКАВАЊЕ (ФУНКЦИЈА)

Дефиниција: Нека су А и В дати скупови. Пресликавање (функција или трансформација) из скупа А у скуп В је сваки договор (правило, пропис), помоћу којег се <u>сваком</u> елементу $x \in A$ придружује <u>јединствен елемент</u> $y \in B$.

- Пресликавање се може дефинисати и на следећи начин:

Функција или пресликавање је свако придруживање елемената једног скупа елементима другог скупа при чему се сваки елемент првог скупа пресликава у тачно један елемент другог скупа.



- За записивање (означавање) функција обично се користи ознака $f: A \to B$ (ова ознака се чита: пресликавање f пресликава скуп А у скуп В).
- Скуп А се назива **домен** (област дефинисаности) пресликавања. Често се домен функције означава са $\mathcal{D}(f)$.
- Скуп В се назива **кодомен** пресликавања. Кодомен пресликавања представља скуп свих слика $f(x)$ и означава са $f(A)$ или $\operatorname{Im} f$ и назива **област вредности пресликавања** f.

$$\operatorname{Im} f = f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}, \qquad f(A) \subseteq B.$$

- Елементе скупа А називамо аргументи, независно промењиве, ликови, оригинали пресликавања или елементи домена.
- Елементи скупа В називају се слике, копије.

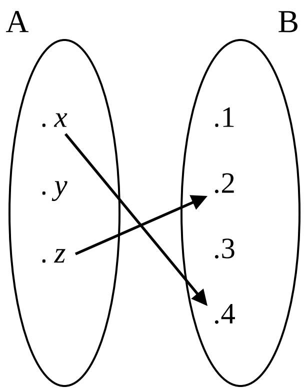
Дефиниција: За две функције $f: A \to B$ и $g: C \to D$ кажемо да су једнаке (у ознаци $f = g$) ако и само ако важи:

1. Функције f и g имају исти домен тј. $A = C$;

2. Функције f и g имају исти кодомен тј. $B = D$;
3. За $\forall x \in A$ важи $f(x) = g(x)$.

Пример: Испитати да ли следећи дијаграми дефинишу пресликавања из скупа $A = \{x, y, z\}$ у скуп $B = \{1,2,3,4\}$.

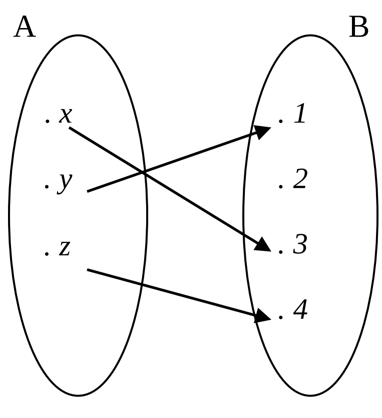
а)



$f_1 : A \to B$

Са дијаграма се види да $f_1 : A \to B$ није пресликавање, елементу $y \in A$ није придружен ни један елемент из скупа B што значи да дати дијаграм не дефинише пресликавање из скупа A у скуп B (није задовољена дефиниција да се сваком елементу из A придружује јединствен елемент из скупа B).

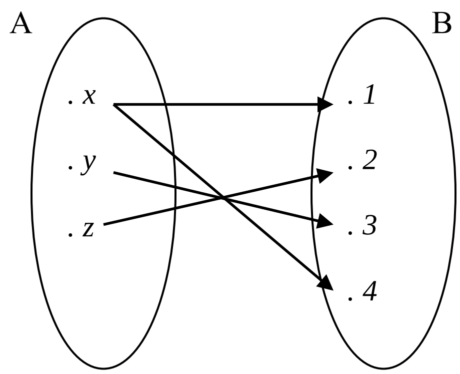
б)



$f_2 : A \to B$

Са дијаграма се види да $f_2 : A \to B$ јесте пресликавање зато што је испуњен услов да се сваки елемент домена пресликава у јединствен елемент кодомена.

ц)



$f_3 : A \to B$

На основу дефиниције пресликавања очигледно је да $f_3 : A \to B$ није пресликавање. Са дијаграма се види да су елементу $x \in A$ придружена два елемента из скупа B (x се пресликава у 1 и x се пресликава у 4). На основу дефиниције знамо да је дозвољено да се сваки елемент из домена A пресликава у јединствен елемент кодомена B.

Врсте пресликавања

Сурјекција

Дефиниција: Функција $f : A \to B$ зове се **сурјекција** или **„на“** пресликавање ако је $f(A) = B$ (област вредности функције f једнака је скупу B), што се може записати и на следећи начин:

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) \qquad y = f(x).$$

Најједноставније речено функција је сурјекција ако и само ако су **сви елементи кодомена слике бар једног елемента из домена** (дозвољено је и да је елемент из кодомена слика већег броја елемената из домена тј. да се више елемената из домена пресликавају у исти елемент кодомена).

<u>Инјекција</u>

Дефиниција: Функција $f : A \to B$ зове се **инјекција** или **„1-1“** пресликавање ако важи:

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \qquad (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2) \text{ односно}$$
$$(x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Односно, под инјекцијом се подразумева пресликавање које **различитим елементима домена придружује различите елементе кодомена.**

<u>Бијекција</u>

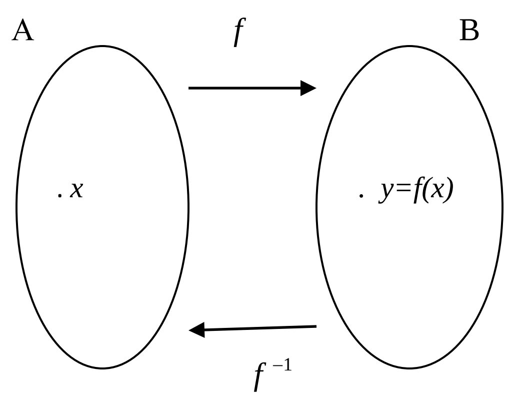
Дефиниција: Пресликавање $f : A \to B$ је **бијекција** ако је **инјекција** и **сурјекција**. Дакле, бијекцију f карактерише услов да је **сваки елеменат кодомена слика једног и само једног елемента из домена.**

- Бијективна функција или бијекција назива се **пермутација** скупа А када $f : A \to A$.

Дефиниција: Ако је пресликавање $f : A \to B$ бијекција, онда постоји пресликавање $f^{-1} : B \to A$ дефинисано са:

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y \quad \text{где је } x \in A, y \in B$$

које се назива **инверзно пресликавање** пресликавања f.



ЗАДАЦИ

1. Нека је $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и $f : A \to R$ пресликавање дефинисано на следећи начин:

   а) $f(x) = x^2 - 1$

   б) $f(x) = x^3 + 2$

   Наћи област вредности датих функција и испитати да ли је f сурјекција.

   Решење:

   а) $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ - област вредности пресликавања f

   Како је $f(x) = x^2 - 1$ то значи да је:

$$
\begin{aligned}
f(-2) &= (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \\
f(-1) &= (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \\
f(0) &= 0^2 - 1 = 0 - 1 = -1 \\
f(1) &= 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \\
f(2) &= 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3
\end{aligned}
$$

   Сада је:

$$
\begin{aligned}
f(A) &= \{f(x) \mid x \in A\} \\
&= \{f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)\} \\
&= \{3, 0, -1, 0, 3\} \\
&= \{-1, 0, 3\}
\end{aligned}
$$

   Види се да је $f(A) \subset R$, на основу дефиниције следи да ово пресликавање није сурјекција (да би пресликавање било сурјекција потребно је да је $f(A) = R$).

   б) $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$- област вредности пресликавања f

   Како је $f(x) = x^3 + 2$ то значи да је:

$$f(-2) = (-2)^3 + 2 = -8 + 2 = -6$$
$$f(-1) = (-1)^3 + 2 = -1 + 2 = 1$$
$$f(0) = 0^3 + 2 = 0 + 2 = 2$$
$$f(1) = 1^3 + 2 = 1 + 2 = 3$$
$$f(2) = 2^3 + 2 = 8 + 2 = 10$$

Сада је:

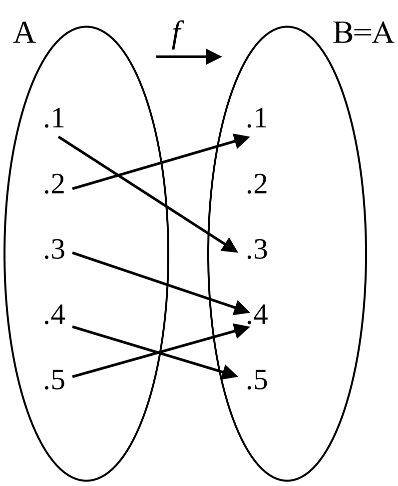
$$\begin{aligned} f(A) &= \{ f(x) \mid x \in A \} \\ &= \{ f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2) \} \\ &= \{-6,1,2,3,10\} \end{aligned}$$

Види се да је $f(A) \subset R$, на основу дефиниције следи да ово пресликавање није сурјекција (да би пресликавање било сурјекција потребно је да је $f(A) = R$).

2. Проверити да ли је сурјекција пресликавање $f : A \to B$ при чему је $A = B = \{1,2,3,4,5\}$ дефинисано са: $f(1) = 3,\ f(2) = 1,\ f(3) = 4,\ f(4) = 5,\ f(5) = 4.$

Решење:

<u>I начин</u>



Елемент $2 \in B$ није слика ни једног елемента из скупа А што значи да није остварен услов да је <u>сваки</u> елемент из скупа В (кодомена) слика <u>бар једног</u> елемента из скупа А (домена). Дато пресликавање није сурјекција.

<u>II начин</u>

Да ово пресликавање није сурјекција може се доказати и на други начин, помоћу области вредности пресликавања *f*.

$$f(A) = \{ f\{x\} \mid x \in A \} \text{ - област вредности пресликавања } f$$

$$\begin{aligned} &= \{ f(1), f(2), f(3), f(4), f(5) \} \\ &= \{3,1,4,5,4\} \\ &= \{1,3,4,5\} \end{aligned}$$

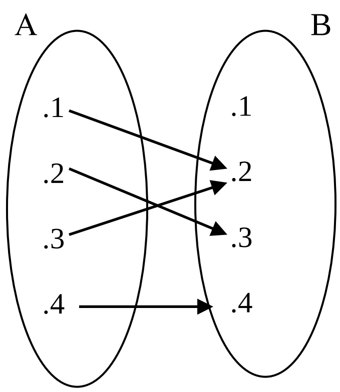
Види се да је $f(A) \subset B$ што значи да пресликавање није сурјекција (да би пресликавање било сурјекција потребно је да буде $f(A) = B$).

3. Проверити да ли је инјекција, сурјекција и бијекција пресликавање:
   а) $f : A \to B$ где је $A = B = \{1,2,3,4\}$ дефинисано са: $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $f(4) = 4$.

   б) $f : N \to Q$ дефинисано са $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

Решење:

а)



Ињекција

Елементи 1 и 3 из скупа А пресликавају се у исти елемент 2 из скупа В, што значи да није задовољена дефиниција ињекције да различити оригинали имају различите слике. Ово пресликавање није ињекција.

Сурјекција

Елемент 1 из скупа В није слика ни једног елемента из скупа А што значи да дато пресликавање није сурјекција. Да би пресликавање било сурјекција потребно је да сваки елемент из кодомена буде слика бар једног (може и више елемената) из домена.

Бијекција

Знамо да је пресликавање бијекција ако је ињекција и сурјекција, како ово пресликавање није ињекција ни сурјекција то значи да није ни бијекција.

(У неким случајевима где је пресликавање ињекција али није сурјекција или обрнуто јесте сурјекција али није ињекција такво пресликавање није ни бијекција. За бијекцију је неопходно да буде и ињекција и сурјекција).

б)

Ињекција

За проверу ињекције искористићемо дефиницију ињекције да је

$$(\forall x_1, x_2 \in A) \qquad (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2) \text{ односно}$$
$$(x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Претпоставићемо да су једнаке слике тј. да је $f(x_1) = f(x_2)$, докажимо да су једнаки и оригинали тј. $x_1 = x_2$.

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2}$$
$$x_1(1+x_2) = x_2(1+x_1)$$
$$x_1 + x_1x_2 = x_2 + x_2x_1$$
$$x_1 = x_2$$

Ово пресликавање јесте инјекција јер из претпоставке да су једнаке слике добили смо да су једнаки и оригинали.

<u>Сурјекција</u>

$f : N \to Q$ где је $N = \{1,2,3,...\}$ скуп природних бројева а Q скуп рационалних бројева (скуп бројева који могу да се представе у облику разломка).

Како је $f(x) = \frac{x}{1+x}$ то за

$$x = 1 \in N \Rightarrow \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \in Q,$$

$$x = 2 \in N \Rightarrow \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} \in Q,$$

$$x = 3 \in N \Rightarrow \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4} \in Q,$$

.

.

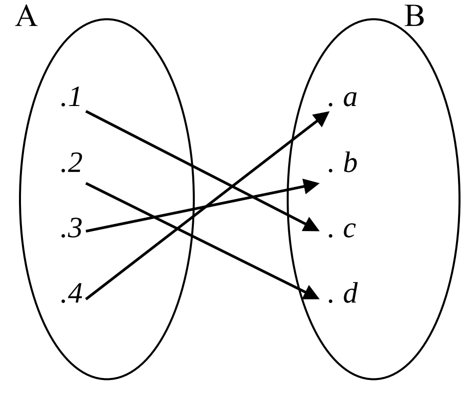
$$f(N) = \{f(x) \mid x \in N\}$$

$$= \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} ...\right\}$$

Како је $f(N) \subset Ra$ ово пресликавање није сурјекција.

Како пресликавање јесте инјекција али није сурјекција то значи да није бијекција.

4. Нека је $f : A \to B$ пресликавање дефинисано дијаграмом. Испитати да ли је дато пресликавање бијекција, ако јесте наћи инверзно пресликавање f^{-1}.



Решење:

Да би пресликавање било бијекција потребно је према дефиницији да сваки елемент из кодомена B буде слика јединственог елемента из домена A. Са дијаграма који је дат у задатку се види да овај услов јесте задовољен што значи да пресликавање f јесте бијекција.

Ако пресликавање $f : A \to B$ јесте бијекција то према дефиницији следи да постоји инверзно пресликавање $f^{-1} : B \to A$.

Како је $f(1) = c \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(c) = 1$

$f(2) = d \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(d) = 2$

$f(3) = b \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(b) = 3$

$f(4) = a \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(a) = 4.$