Предмет: Математика 2 (вежбе)
Предметни наставник: Проф. др Љиљана Пауновић
Датум предавања: 19. март 2020. год.
Одсек: Разредна настава

Глава 1

Задаци

1.1. Доказати да низ $a_n = 1/n$ има граничну вредност 0.

Решење. Ако образујемо апсолутну вредност разлике $a_n - 0$, имаћемо $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$, а за произвољно $\varepsilon > 0$ је

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Према томе, за свако $\varepsilon > 0$ постоји природан број $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ тако да

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon),$$

што значи да је низ $(1/n)$ конвергентан и да му је 0 гранична вредност.

1.2. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = 2.$$

Решење. У овом случају је $a_n = \frac{2n^2}{n^2+1}$ и $a = 2$, па на основу тога имамо

$$|a_n - a| = \left|\frac{2n^2}{n^2+1} - 2\right| = \frac{2}{n^2+1} < \frac{2}{n^2}. \qquad (*)$$

Како је $\frac{2}{n^2} < \varepsilon$ тачно за $n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$, то узимајући на пример, $n_0 = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right] +$

1, имамо да $n > n_0$ повлачи $\dfrac{2}{n^2} < \varepsilon$, на основу $(*)$ je

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| = \left|\frac{2n^2}{n^2+1} - 2\right| < \varepsilon.$$

из овога следи да je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = 2.$$

1.3. Одредити граничне вредности следећих низова.

1) $a_n = \dfrac{n^2+n}{n^2-5n-4}$,

2) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$,

3) $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - 1)$,

4) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$.

Решење.

$$
\begin{aligned}
1)\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2-5n-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{1}{n}}{1-\dfrac{5}{n}-\dfrac{4}{n^2}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{n}-\dfrac{4}{n^2}\right)} = \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n^2}} \\
&= \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}{1-5\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}-4\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}} = \frac{1+0}{1-5\cdot 0-4\cdot 0} = 1. \\
2)\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{1/2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)^{1/2} = \left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = (1+0)^{1/2} = 1. \\
3)\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

4) За свако $n \in \mathbb{N}$ је $2n \in \mathbb{N}$, па ако ставимо $2n = m$, онда $m \to \infty$ ако и само ако $n \to \infty$ и $n = m/2$, па је

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m/2} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^{1/2} = e^{1/2} = \sqrt{e}.
\end{aligned}
$$

1.4. Доказати да низ са општим чланом x_n конвергира ка x, па наћи неко $n_0 \in \mathbb{N}$, тако да важи $|x_n - x| < \varepsilon$, за свако $n > n_0$.

1) $x_n = \dfrac{n+1}{2n}, \quad x = \dfrac{1}{2}, \quad \varepsilon = 0.02;$

2) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}, \quad x = 0, \quad \varepsilon = 0.002.$

Решење. 1)

$$|x_n - x| = \left|\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n+1-n}{2n}\right| = \left|\frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n}.$$

За произвољно $\varepsilon > 0$ важи:

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon \Leftrightarrow 2n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Бирајући сада $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да $2n_0 \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$, имамо:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \left(n > n_0 \Leftrightarrow 2n > 2n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{2n} < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon\right),$$

или остављајући само оно што нам је потребно:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon),$$

што значи да је $x = \dfrac{1}{2}$ гранична вредност низа (x_n), односно да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Специјално, за $\varepsilon = 0.02$ бирамо $n_0 \in \mathbb{N}$, такво да $2n_0 \geq \dfrac{1}{0.02}$ односно $n_0 \geq \dfrac{100}{4} = 25$. Тражено задовољава већ $n_0 = 25$.

2)

$$|x_n - x| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1} - 0\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

За произвољно $\varepsilon > 0$ важи:

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

па бирамо $n_0 \in \mathbb{N}$, такво да важи: $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. Тада имамо,

$$n+1 > n > n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Очигледно

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon),$$

што значи да је низ (x_n) конвергентан и да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0.$$

Специјално, за $\varepsilon = 0.002$ узимамо $n_0 = \left[\frac{1}{0.002}\right] = 500.$

1.5. Наћи тачке нагомилавања и испитати конвергенцију низова задатих општим чланом:

1) $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{n+1}$;

2) $b_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2-(-1)^n}$.

Решење. 1) Како је

$$(-1)^{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{за непарно } n \\ -1, & \text{за парно } n \end{cases}.$$

Тада је

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1}, & \text{за непарно } n \\ -\dfrac{n}{n+1}, & \text{за парно } n \end{cases},$$

односно

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{2k-1}{2k}, & n = 2k-1 \\ -\dfrac{2k}{2k+1}, & n = 2k \end{cases}.$$

Низови (a_{2k-1}), $a_{2k-1} = \dfrac{2k-1}{2k}$ и (a_{2k}), $a_{2k} = -\dfrac{2k}{2k+1}$, су поднизови низа (a_n). У произвољној ε-околини броја 1 (броја -1) налази се бесконачно много чланова првог (другог) подниза, што значи да су 1 и -1 тачке нагомилавања низа (a_n). Два издвојена подниза садрже све чланове низа (a_n), а

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2k-1}{2k} = 1,$$

и
$$\lim_{k\to\infty} -\frac{2k}{2k+1} = -1,$$
па су $T_1 = 1$ и $T_2 = -1$ једине тачке нагомилавања низа (a_n). Тај низ не може бити конвергентан јер има више од једне тачке нагомилавања.

2)
$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2+1}{2-1}, & \text{за парно } \ n \\ \dfrac{2-1}{2+1}, & \text{за непарно } \ n \end{cases} .$$
У произвољној ε-околини броја 3 налазе се бар сви парни чланови низа (b_n) (јер је $3 \in (3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$), а таквих је бесконачно много. Слично у произвољној ε-околини броја $\dfrac{1}{3}$ налазе се бар сви непарни чланови низа (b_n) $\left(\text{јер} \dfrac{1}{3} \in \left(\dfrac{1}{3} - \varepsilon, \dfrac{1}{3} + \varepsilon\right)\right)$, а и таквих је бесконачно много. Тада су $T_1 = 3$ и $T_2 = \dfrac{1}{3}$ тачке нагомилавања низа (b_n). Констатујемо да низ (b_n) нема других тачака нагомилавања, као и да није конвергентан.

1.6. Доказати конвергенцију низа чији је општи члан дефинисан са $a_n = \sqrt[n]{2}$.

Решење.

Низ је ограничен:
Претпоставимо да је за неко $n \in \mathbb{N}$ испуњено $\sqrt[n]{2} > 2$. Тада је $\sqrt[n]{2} > 2 \Rightarrow 2 > 2^n \Rightarrow 1 > 2^{n-1}$, што је бесмислено ($n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow n-1 \geq 0 \Rightarrow 2^{n-1} \geq 2^0 = 1$). Дакле, $0 < \sqrt[n]{2} \leq 2$ (лева неједнакост је тривијално задовољена).

Низ је опадајући:
Претпоставимо да је за неко $n \in \mathbb{N}$ испуњено $a_n < a_{n+1}$. Тада је $\sqrt[n]{2} < \sqrt[n+1]{2} \Rightarrow 2^{n+1} < 2^n$ (леву и десну страну неједнакости степеновали смо са $n(n+1) > 0$) $\Rightarrow 2 < 1$, што је апсурд. $\Rightarrow a_n \geq a_{n+1}$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Дакле низ (a_n) је конвергентан.