Предмет: Математика 2 (вежбе)
Предметни наставник: Проф. др Љиљана Пауновић
Датум предавања: 18. март 2020. год.
Одсек: Разредна настава

Глава 1

Реални низови

1.1 Задаци

1.1. Написати првих пет чланова низа (x_n) задатог општим чланом:

1) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$;

2) $x_n = \cos n\pi$;

3) $x_n = \dfrac{3n+5}{2n-3}$.

Решење.

1)

$$x_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, \quad x_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4},$$
$$x_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}, \qquad x_5 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}.$$

2)

$$x_1 = \cos 1\pi = -1, \qquad x_2 = \cos 2\pi = 1, \quad x_3 = \cos 3\pi = -1,$$
$$x_4 = \cos 4\pi = 1, \qquad x_5 = \cos 5\pi = -1.$$

3)

$$x_1 = -8, \quad x_2 = 11, \quad x_3 = \frac{14}{3}, \quad x_4 = \frac{17}{5}, \quad x_5 = \frac{20}{7}.$$

1.2. Испитати ограниченост и наћи највећи (најмањи) члан низа задатог општим чланом:

1) $a_n = \dfrac{n}{3+n}$;

2) $a_n = n + \dfrac{7}{n}$.

Решење. 1) Јасно је да важи:

$$0 < \frac{n}{3+n} < \frac{3+n}{3+n} = 1,$$

за свако $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < a_n < 1$, за свако $n \in \mathbb{N}$, што значи да је низ (a_n) ограничен.

Како је

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{n}{3+n} - \frac{n+1}{3+(n+1)} = \frac{(4+n)n - (n+1)(3+n)}{(3+n)(4+n)} \\ &= \frac{n^2 + 4n - n^2 - 4n - 3}{(3+n)(4+n)} = -\frac{3}{(3+n)(4+n)} < 0 \end{aligned}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$, то је $a_n < a_{n+1}$, за свако $n \in \mathbb{N}$, што значи да низ (a_n) строго расте. Његов најмањи члан је тада члан са најмањим индексом:

$$a_{min} = a_1 = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4},$$

а највећи члан низа не постоји.

2) $0 < n + \dfrac{7}{n} = a_n$, што значи да је низ (a_n) ограничен с доње стране. Како је $a_n = n + \dfrac{7}{n} > n$, а n (као елемент скупа природних бројева) није ограничен одозго, па тако ни низ (a_n) није ограничен са горње стране. Даље важи:

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= n + \frac{7}{n} - \left(n + 1 + \frac{7}{n+1}\right) = -1 + \frac{7}{n} - \frac{7}{n+1} \\ &= -1 + \frac{7(n+1) - 7n}{n(n+1)} = -1 + \frac{7}{n(n+1)}, \\ a_n - a_{n+1} < 0 &\Leftrightarrow -1 + \frac{7}{n(n+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{7}{n(n+1)} < 1 \\ &\Leftrightarrow 7 < n(n+1), \end{aligned}$$

што је испуњено за $n \geq 3$.

Слично, $a_n - a_{n+1} > 0 \Leftrightarrow 7 > n(n+1)$, што је испуњено за $n < 3$. Тада имамо следећи низ неједнакости: $a_1 > a_2 > a_3 < a_4 < a_5 < \ldots$, што значи да је

$$a_{min} = a_3 = 3 + \frac{7}{3} = \frac{16}{3}.$$

Максимални члан низа не постоји.

1.3. Испитати ограниченост и наћи највећи (најмањи) члан низа задатог општим чланом:

1) $a_n = e^{2-n}$,

2) $a_n = -\dfrac{n^2}{2^n}$.

Решење. 1) Функција $f(t) = e^t$ је ненегативна и строго растућа, па уз $2 - n < 2$ $(n \in \mathbb{N})$ важи:

$$0 < e^{2-n} < e^2,$$

односно: $0 < a_n < e^2$, за свако $n \in \mathbb{N}$, што значи да је низ (a_n) ограничен. Како је

$$a_n - a_{n+1} = e^{2-n} - e^{2-(n+1)} = e^{2-n} - e^{2-n-1} = e^{2-n-1}(e-1) > 0,$$

за свако $n \in \mathbb{N}$, што значи да низ (a_n) строго опада. Тада је $a_{max} = a_1 = e^{2-1} = e$, а a_{min} не постоји.

2) Слично претходном, проверимо најпре када је испуњено $a_n > a_{n+1}$.

$$\begin{aligned} a_n > a_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{n^2}{2^n} > -\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \Leftrightarrow (n+1)^2 > 2n^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 > n^2 - 2n - 1. \end{aligned}$$

Слично, $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow 0 < n^2 - 2n - 1$. Како је десно квадратни трином $n^2 - 2n - 1$, па даље испитујемо функцију:

$$f(x) = x^2 - 2x - 1.$$

Вредности ове функције су негативне за $x \in (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$, што значи да је: $n^2 - 2n - 1 < 0$, за $n = 1$ и $n = 2$. За $n > 2$ је $n^2 - 2n - 1 > 0$. Тада сагласно ранијем $a_1 > a_2 > a_3 < a_4 < a_5 < \ldots$. Најмањи члан низа је очигледно $a_3 = -\frac{9}{8}$. Највећи члан не постоји јер је $a_1 = -\frac{1}{2}$, а на пример већ $a_1 < a_7 = -\frac{49}{128} < a_8 < a_9 < \ldots$. Низ (a_n) је ограничен $-\frac{9}{8} \leq a_n < 0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$.

1.4. Испитати монотоност низова датих формулама општег члана:

1) $a_n = \frac{n+2}{2n}$;

2) $b_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$.

Решење. 1)

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} = & \ \frac{n+2}{2n} - \frac{(n+1)+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{n} - \frac{n+3}{n+1}\right) \\ = & \ \frac{n^2+3n+2-n^2-3n}{2n(n+1)} = \frac{2}{2n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \end{aligned}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада је $a_n > a_{n+1}$ (за свако $n \in \mathbb{N}$), што значи да је низ строго опадајући.

2)

$$\begin{aligned} b_n - b_{n+1} &= \frac{2+(-1)^n}{n} - \frac{2+(-1)^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{(2+(-1)^n)(n+1) - (2+(-1)^{n+1})n}{n(n+1)} \\ &= \frac{2+(-1)^n(n+1-(-1)n)}{n(n+1)} = \frac{2+(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)} \\ &= \begin{cases} \frac{2n+3}{n(n+1)}, & \text{за парно} \ \ n \\ \frac{1-2n}{n(n+1)}, & \text{за непарно} \ \ n \end{cases}. \end{aligned}$$

Али $2n+3 > 0$, а $1-2n < 0$, за $n \in \mathbb{N}$, па

$$b_n - b_{n+1} = \begin{cases} > 0, & \text{за парно} \ \ n \\ < 0, & \text{за непарно} \ \ n \end{cases},$$

што значи да низ (b_n) није монотон. У ствари важи:

$$b_1 < b_2 > b_3 < b_4 > b_5 < b_6 > \dots$$

1.5. Испитати ограниченост низова задатих формулама општег члана:

1) $a_n = 2 - \dfrac{1}{n}$,

2) $b_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

Решење. 1) $0 < a_n < 2$, за свако n. Заиста претпоставимо да $(\exists n)(n \in \mathbb{N})\ \ a_n \leq 0$. Тада:

$$2 - \frac{1}{n} \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow 2n \leq 1,$$

што је немогуће. Претпоставимо да $(\exists n)(n \in \mathbb{N})\ \ a_n \geq 2$. Тада

$$2 - \frac{1}{n} \geq 2 \Leftrightarrow 0 \geq \frac{1}{n}$$

што је контрадикторно са $\dfrac{1}{n} > 0$.

2) b_n је позитиван број различит од нуле, дакле $0 \leq b_n$. Даље важи $2 \leq 2, 2 \leq 3, 2 \leq 4, \dots, 2 \leq n$, па тако и

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n-1 \text{ пута}} \leq 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Односно: $\dfrac{2^{n-1}}{2 \cdot \dots \cdot n} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{2^n}{n!} \leq 2$. Дакле $0 \leq \dfrac{2^n}{n!} \leq 2$, што значи да је (b_n) ограничен.