Глава 1

Реални низови

1.1 Основна својства конвергентних низова

Теорема 1.1. *Ако два дата низа* (a_n) *и* (b_n) *имају исту граничну вредност,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a,$$

и ако је за свако $n \in \mathbb{N}$*,* $a_n \leq c_n \leq b_n$*, онда је и низ* (c_n) *конвергентан и*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

Теорема 1.2. *Ако је* $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq b_n$ *и постоје*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \textit{и} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

онда је $a \leq b$*.*

Дефиниција 1.1. *Низ* (a_n) *је* ***нула низ*** *ако је*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Теорема 1.3. *Ако је*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \textit{и} \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

тада је

1) $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = ka, \quad k \in \mathbb{R},$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab,$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b,$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}, \quad b \neq 0,$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|.$

1.2 Задаци

1.1. Показати да низ

$$a_n = \frac{n(-1)^n}{2} + \frac{2}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

није ограничен, односно прецизније: да није ограничен ни одозго ни одоздо.

Решење. За $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ имамо $a_n = a_{2k} = k + \dfrac{1}{k}$. Отуда $a_{2k} > r$ важи: за свако $k \in \mathbb{N}$ ако је $r \leq 0$, односно за $k \geq r$ ако је $r > 0$. На основу тога исказ

$$(\exists r \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\; a_n \leq r,$$

у нашег низа није тачан, па тај низ није ограничен одозго.

Ако је, $n = 2k-1$, имамо $a_n = a_{2k-1} = -\dfrac{2k-1}{2} + \dfrac{2}{2k-1} \leq -k + \dfrac{1}{2} + 2 = -k + \dfrac{5}{2}$. Како је $-k + \dfrac{5}{2} < m$ ако (и само ако) је $k > \dfrac{5}{2} - m$, то важи $a_{2k-1} < m$ за $k > \dfrac{5}{2} - m$. Отуда исказ

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\; m \leq a_n,$$

у случају посматраног низа није тачан, па тај низ није неограничен одоздо.

1.2. Доказати да је низ са општим чланом $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ конвергентан и да има граничну вредност $a = 1$.

Решење. Како је

$$|a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n},$$

то је ова разлика мања од произвољног позитивног броја ε када је $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, тј. $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Дакле, за n_0 бирамо природан број већи или једнак $\dfrac{1}{\varepsilon}$ и у том случају важи

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \left(n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon\right).$$

Тако на пример, ако узмемо да је $\varepsilon = 1/100$, онда је за свако $n > 100$,

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{100} = \varepsilon,$$

тј. $a_n \in \left(1 - \dfrac{1}{100}, 1 + \dfrac{1}{100}\right)$. Према томе,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

1.3. Доказати да низ $a_n = 1/n$ има граничну вредност 0.

Решење. Ако образујемо апсолутну вредност разлике $a_n - 0$, имаћемо $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| = \dfrac{1}{n}$, а за произвољно $\varepsilon > 0$ је

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Према томе, за свако $\varepsilon > 0$ постоји природан број $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ тако да

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon),$$

што значи да је низ $(1/n)$ конвергентан и да му је 0 гранична вредност.

1.4. Доказати да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = 2.$$

Решење. У овом случају је $a_n = \dfrac{2n^2}{n^2+1}$ и $a = 2$, па на основу тога имамо

$$|a_n - a| = \left|\frac{2n^2}{n^2+1} - 2\right| = \frac{2}{n^2+1} < \frac{2}{n^2}. \qquad (*)$$

Како је $\dfrac{2}{n^2} < \varepsilon$ тачно за $n > \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}$, то узимајући на пример, $n_0 = \left[\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}\right] + 1$, имамо да $n > n_0$ повлачи $\dfrac{2}{n^2} < \varepsilon$, на основу $(*)$ је

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| = \left|\frac{2n^2}{n^2+1} - 2\right| < \varepsilon.$$

из овога следи да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = 2.$$

1.5. Одредити граничне вредности следећих низова.

1) $a_n = \dfrac{n^2+n}{n^2-5n-4}$,

2) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$,

3) $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - 1)$,

4) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$.

Решење.

$$\begin{aligned}
1) \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2-5n-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{1}{n}}{1-\dfrac{5}{n}-\dfrac{4}{n^2}}\\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{n}-\dfrac{4}{n^2}\right)} = \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n^2}}\\
&= \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}{1-5\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}-4\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}} = \frac{1+0}{1-5\cdot 0-4\cdot 0} = 1.\\
2) \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{1/2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\\
&= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)^{1/2} = \left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = (1+0)^{1/2} = 1.\\
3) \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

4) За свако $n \in \mathbb{N}$ је $2n \in \mathbb{N}$, па ако ставимо $2n = m$, онда $m \to \infty$ ако и само ако $n \to \infty$ и $n = m/2$, па је

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m/2}\\
&= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^{1/2} = e^{1/2} = \sqrt{e}.
\end{aligned}$$

1.6. Написати првих пет чланова низа (x_n) задатог општим чланом:

1) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$;

2) $x_n = \cos n\pi$;

3) $x_n = \dfrac{3n+5}{2n-3}$.

Решење.

1)

$$x_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, \quad x_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4},$$
$$x_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}, \qquad x_5 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}.$$

2)

$$x_1 = \cos 1\pi = -1, \qquad x_2 = \cos 2\pi = 1, \quad x_3 = \cos 3\pi = -1,$$
$$x_4 = \cos 4\pi = 1, \qquad x_5 = \cos 5\pi = -1.$$

3)

$$x_1 = -8, \quad x_2 = 11, \quad x_3 = \frac{14}{3}, \quad x_4 = \frac{17}{5}, \quad x_5 = \frac{20}{7}.$$

1.7. Испитати ограниченост и наћи највећи (најмањи) члан низа задатог општим чланом:

1) $a_n = \dfrac{n}{3+n}$;

2) $a_n = n + \dfrac{7}{n}$.

Решење. 1) Јасно је да важи:

$$0 < \frac{n}{3+n} < \frac{3+n}{3+n} = 1,$$

за свако $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 < a_n < 1$, за свако $n \in \mathbb{N}$, што значи да је низ (a_n) ограничен.

Како је

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{n}{3+n} - \frac{n+1}{3+(n+1)} = \frac{(4+n)n - (n+1)(3+n)}{(3+n)(4+n)} \\ &= \frac{n^2+4n-n^2-4n-3}{(3+n)(4+n)} = -\frac{3}{(3+n)(4+n)} < 0 \end{aligned}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$, то је $a_n < a_{n+1}$, за свако $n \in \mathbb{N}$, што значи да низ (a_n) строго расте. Његов најмањи члан је тада члан са најмањим индексом:

$$a_{min} = a_1 = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4},$$

а највећи члан низа не постоји.

2) $0 < n + \dfrac{7}{n} = a_n$, што значи да је низ (a_n) ограничен с доње стране. Како је $a_n = n + \dfrac{7}{n} > n$, а n (као елемент скупа природних бројева) није ограничен одозго, па тако ни низ (a_n) није ограничен са горње стране. Даље важи:

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n+1} &= n + \frac{7}{n} - \left(n + 1 + \frac{7}{n+1}\right) = -1 + \frac{7}{n} - \frac{7}{n+1} \\
&= -1 + \frac{7(n+1) - 7n}{n(n+1)} = -1 + \frac{7}{n(n+1)}, \\
a_n - a_{n+1} < 0 &\Leftrightarrow -1 + \frac{7}{n(n+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{7}{n(n+1)} < 1 \\
&\Leftrightarrow 7 < n(n+1),
\end{aligned}$$

што је испуњено за $n \geq 3$.

Слично, $a_n - a_{n+1} > 0 \Leftrightarrow 7 > n(n+1)$, што је испуњено за $n < 3$. Тада имамо следећи низ неједнакости: $a_1 > a_2 > a_3 < a_4 < a_5 < \ldots$, што значи да је

$$a_{min} = a_3 = 3 + \frac{7}{3} = \frac{16}{3}.$$

Максимални члан низа не постоји.

1.8. Испитати ограниченост и наћи највећи (најмањи) члан низа задатог општим чланом:

1) $a_n = e^{2-n}$,

2) $a_n = -\dfrac{n^2}{2^n}$.

Решење. 1) Функција $f(t) = e^t$ је ненегативна и строго растућа, па уз $2 - n < 2$ $(n \in \mathbb{N})$ важи:

$$0 < e^{2-n} < e^2,$$

односно: $0 < a_n < e^2$, за свако $n \in \mathbb{N}$, што значи да је низ (a_n) ограничен. Како је

$$a_n - a_{n+1} = e^{2-n} - e^{2-(n+1)} = e^{2-n} - e^{2-n-1} = e^{2-n-1}(e-1) > 0,$$

за свако $n \in \mathbb{N}$, што значи да низ (a_n) строго опада. Тада је $a_{max} = a_1 = e^{2-1} = e$, а a_{min} не постоји.

2) Слично претходном, проверимо најпре када је испуњено $a_n > a_{n+1}$.

$$\begin{aligned} a_n > a_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{n^2}{2^n} > -\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \Leftrightarrow (n+1)^2 > 2n^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 > n^2 - 2n - 1. \end{aligned}$$

Слично, $a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow 0 < n^2 - 2n - 1$. Како је десно квадратни трином $n^2 - 2n - 1$, па даље испитујемо функцију:

$$f(x) = x^2 - 2x - 1.$$

Вредности ове функције су негативне за $x \in (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, што значи да је: $n^2 - 2n - 1 < 0$, за $n = 1$ и $n = 2$. За $n > 2$ је $n^2 - 2n - 1 > 0$. Тада сагласно ранијем $a_1 > a_2 > a_3 < a_4 < a_5 < \ldots$. Најмањи члан низа је очигледно $a_3 = -\frac{9}{8}$. Највећи члан не постоји јер је $a_1 = -\frac{1}{2}$, а на пример већ $a_1 < a_7 = -\frac{49}{128} < a_8 < a_9 < \ldots$. Низ (a_n) је ограничен $-\frac{9}{8} \leq a_n < 0 \ (\forall n \in \mathbb{N})$.

1.9. Доказати да низ са општим чланом x_n конвергира ка x, па наћи неко $n_0 \in \mathbb{N}$, тако да важи $|x_n - x| < \varepsilon$, за свако $n > n_0$.

1) $x_n = \dfrac{n+1}{2n}, \quad x = \dfrac{1}{2}, \quad \varepsilon = 0.02;$

2) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}, \quad x = 0, \quad \varepsilon = 0.002.$

Решење. 1)

$$|x_n - x| = \left|\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n+1-n}{2n}\right| = \left|\frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n}.$$

За произвољно $\varepsilon > 0$ важи:

$$\frac{1}{2n} < \varepsilon \Leftrightarrow 2n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Бирајући сада $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да $2n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$, имамо:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ \left(n > n_0 \Leftrightarrow 2n > 2n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{2n} < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon\right),$$

или остављајући само оно што нам је потребно:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon),$$

што значи да је $x = \dfrac{1}{2}$ гранична вредност низа (x_n), односно да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Специјално, за $\varepsilon = 0.02$ бирамо $n_0 \in \mathbb{N}$, такво да $2n_0 \geq \dfrac{1}{0.02}$ односно $n_0 \geq \dfrac{100}{4} = 25$. Тражено задовољава већ $n_0 = 25$.

2)

$$|x_n - x| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1} - 0\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

За произвољно $\varepsilon > 0$ важи:

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

па бирамо $n_0 \in \mathbb{N}$, такво да важи: $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. Тада имамо,

$$n+1 > n > n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \Rightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Очигледно

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon),$$

што значи да је низ (x_n) конвергентан и да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0.$$

Специјално, за $\varepsilon = 0.002$ узимамо $n_0 = \left[\dfrac{1}{0.002}\right] = 500.$

1.10. Наћи тачке нагомилавања и испитати конвергенцију низова задатих општим чланом:

1) $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{n+1}$;

2) $b_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2-(-1)^n}$.

Решење. 1) Како је

$$(-1)^{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{за непарно } \ n \\ -1, & \text{за парно } \ n \end{cases}.$$

Тада је

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1}, & \text{за непарно } \ n \\ -\dfrac{n}{n+1}, & \text{за парно } \ n \end{cases},$$

односно

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{2k-1}{2k}, & n = 2k-1 \\ -\dfrac{2k}{2k+1}, & n = 2k \end{cases}.$$

Низови (a_{2k-1}), $a_{2k-1} = \dfrac{2k-1}{2k}$ и (a_{2k}), $a_{2k} = -\dfrac{2k}{2k+1}$, су поднизови низа (a_n). У произвољној ε-околини броја 1 (броја -1) налази се бесконачно много чланова првог (другог) подниза, што значи да су 1 и -1 тачке нагомилавања низа (a_n). Два издвојена подниза садрже све чланове низа (a_n), а

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2k-1}{2k} = 1,$$

и

$$\lim_{k\to\infty} -\frac{2k}{2k+1} = -1,$$

па су $T_1 = 1$ и $T_2 = -1$ једине тачке нагомилавања низа (a_n). Тај низ не може бити конвергентан јер има више од једне тачке нагомилавања.

2)

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2+1}{2-1}, & \text{за парно } \ n \\ \dfrac{2-1}{2+1}, & \text{за непарно } \ n \end{cases}.$$

У произвољној ε-околини броја 3 налазе се бар сви парни чланови низа (b_n) (јер је $3 \in (3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$), а таквих је бесконачно много. Слично у произвољној ε-околини броја $\dfrac{1}{3}$ налазе се бар сви непарни чланови низа (b_n) $\left(\text{јер}\dfrac{1}{3} \in \left(\dfrac{1}{3} - \varepsilon, \dfrac{1}{3} + \varepsilon\right)\right)$, а и таквих је бесконачно много. Тада су $T_1 = 3$ и $T_2 = \dfrac{1}{3}$ тачке нагомилавања низа (b_n). Констатујемо да низ (b_n) нема других тачака нагомилавања, као и да није конвергентан.

1.11. Испитати монотоност низова датих формулама општег члана:

1) $a_n = \dfrac{n+2}{2n}$;

2) $b_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$.

Решење. 1)

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} = &\ \frac{n+2}{2n} - \frac{(n+1)+2}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{n} - \frac{n+3}{n+1}\right) \\ = &\ \frac{n^2+3n+2-n^2-3n}{2n(n+1)} = \frac{2}{2n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \end{aligned}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада је $a_n > a_{n+1}$ (за свако $n \in \mathbb{N}$), што значи да је низ строго опадајући.

2)

$$\begin{aligned} b_n - b_{n+1} &= \frac{2+(-1)^n}{n} - \frac{2+(-1)^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{(2+(-1)^n)(n+1) - (2+(-1)^{n+1})n}{n(n+1)} \\ &= \frac{2+(-1)^n(n+1-(-1)n)}{n(n+1)} = \frac{2+(-1)^n(2n+1)}{n(n+1)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{2n+3}{n(n+1)}, & \text{за парно } n \\ \dfrac{1-2n}{n(n+1)}, & \text{за непарно } n \end{cases}. \end{aligned}$$

Али $2n+3 > 0$, а $1-2n < 0$, за $n \in \mathbb{N}$, па

$$b_n - b_{n+1} = \begin{cases} > 0, & \text{за парно } n \\ < 0, & \text{за непарно } n \end{cases},$$

што значи да низ (b_n) није монотон. У ствари важи:

$$b_1 < b_2 > b_3 < b_4 > b_5 < b_6 > \dots$$

1.12. Испитати ограниченост низова задатих формулама општег члана:

1) $a_n = 2 - \dfrac{1}{n}$,

2) $b_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

Решење. 1) $0 < a_n < 2$, за свако n. Заиста претпоставимо да $(\exists n)(n \in \mathbb{N})\ a_n \leq 0$. Тада:

$$2 - \frac{1}{n} \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow 2n \leq 1,$$

што је немогуће. Претпоставимо да $(\exists n)(n \in \mathbb{N})\ a_n \geq 2$. Тада

$$2 - \frac{1}{n} \geq 2 \Leftrightarrow 0 \geq \frac{1}{n}$$

што је контрадикторно са $\dfrac{1}{n} > 0$.

2) b_n је позитиван број различит од нуле, дакле $0 \leq b_n$. Даље важи $2 \leq 2, 2 \leq 3, 2 \leq 4, \dots, 2 \leq n$, па тако и

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n-1 \text{ пута}} \leq 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Односно: $\dfrac{2^{n-1}}{2 \cdot \dots \cdot n} \leq 1 \Rightarrow \dfrac{2^n}{n!} \leq 2$. Дакле $0 \leq \dfrac{2^n}{n!} \leq 2$, што значи да је (b_n) ограничен.

1.13. Доказати конвергенцију низа чији је општи члан дефинисан са $a_n = \sqrt[n]{2}$.

Решење.

Низ је ограничен:

Претпоставимо да је за неко $n \in \mathbb{N}$ испуњено $\sqrt[n]{2} > 2$. Тада је $\sqrt[n]{2} > 2 \Rightarrow 2 > 2^n \Rightarrow 1 > 2^{n-1}$, што је бесмислено ($n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow n - 1 \geq 0 \Rightarrow 2^{n-1} \geq 2^0 = 1$). Дакле, $0 < \sqrt[n]{2} \leq 2$ (лева неједнакост је тривијално задовољена).

Низ је опадајући:
Претпоставимо да је за неко $n \in \mathbb{N}$ испуњено $a_n < a_{n+1}$. Тада је $\sqrt[n]{2} < \sqrt[n+1]{2} \Rightarrow 2^{n+1} < 2^n$ (леву и десну страну неједнакости степеновали смо са $n(n+1) > 0$) $\Rightarrow 2 < 1$, што је апсурд. $\Rightarrow a_n \geq a_{n+1}$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Дакле низ (a_n) је конвергентан.

1.14. Применом аритметичких својстава лимеса и важнијих граничних вредности одредити граничне вредности низова задатих општим чланом:

1) $a_n = \dfrac{3n^2 - 7n + 1}{2 - 5n - 6n^2}$,

2) $b_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$,

3) $c_n = \dfrac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1}$,

4) $d_n = \dfrac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$.

Решење. 1)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 7n + 1}{2 - 5n - 6n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \dfrac{7}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{2}{n^2} - \dfrac{5}{n} - 6} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 - \dfrac{7}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n^2} - \dfrac{5}{n} - 6\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} 6} = \frac{3 - 0 - 0}{0 - 0 - 6} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}\right) + \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}} = 0.
\end{aligned}$$

3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2 + \dfrac{1}{n^2}}}{2 - \dfrac{1}{n}} = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \lim\limits_{n\to\infty} 1} = \frac{0+1}{0-1} = -1.$$

1.15. Наћи граничне вредности низова задатих општим чланом:

1) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$,

2) $b_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n-2}$,

3) $c_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$,

4) $d_n = (1+4n)^{n+3}$,

5) $e_n = \left(1 - \dfrac{5}{n}\right)^n$,

6) $f_n = n(\ln(n+1) - \ln n)$.

Решење. 1)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = e^2.$$

2)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-2} &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-2}\right) \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) \left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-2}\right) = e \cdot 1^{-2} = e \end{aligned}$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n =$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\dfrac{n+1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+4n)^{n+3}=\infty.$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{n}\right)^{n}=$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)^{n\left(-\frac{n}{5}\right)\left(-\frac{5}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{5}{n}\right)^{\left(-\frac{n}{5}\right)}\right]^{\left(-\frac{5}{n}\right)n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left[1+\frac{1}{\left(-\frac{n}{5}\right)}\right]^{\left(-\frac{n}{5}\right)}\right]^{-5} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left[\left[1+\frac{1}{\left(-\frac{n}{5}\right)}\right]^{\left(-\frac{n}{5}\right)}\right]^{5}}\\
&= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left[\left[1+\frac{1}{\left(-\frac{n}{5}\right)}\right]^{\left(-\frac{n}{5}\right)}\right]^{5}} = \frac{1}{e^5}.
\end{aligned}
$$

6)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\ln(n+1)-\ln n\right) &= \lim_{n\to\infty} n\ln\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right))^{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \ln\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\\
&= \ln e = 1.
\end{aligned}
$$

1.16. Наћи следеће граничне вредности:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^3+5x-1}{7x^3+x^2-4}$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2-7x}{x+9}$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+e^x}{3+e^x}$.

Решење. 1)

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{2x^3+5x-1}{7x^3+x^2-4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{5x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{4}{x^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{7+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}} = \frac{2}{7}.
$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2-7x}{x+9}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{7}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{x^2}}=\infty.$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+e^x}{3+e^x}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{5}{e^x}+1}{\dfrac{3}{e^x}+1}=1.$