Глава 1

Функције непрекидног аргумента - гранична вредност и непрекидност

1.1 Преглед дефиниција и теорема

Дефиниција 1.1. *Тачка $a \in \mathbb{R}$ је **тачка нагомилавања** скупа $E \subset \mathbb{R}$ ако за свако $\delta > 0$ скуп $E \cap (a-\delta, a+\delta)$ садржи бар једну тачку различиту од a.*

Дефиниција 1.2. *Нека је дата функција $f : D \to \mathbb{R}$ и нека је a тачка нагомилавања скупа D. Број $b \in \mathbb{R}$ је **гранична вредност функције** f у тачки a, у ознаци $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, ако за свако $\epsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да важи*

$$(\forall x \in D)\ (0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-b| < \epsilon).$$

Формулу $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ читамо: "лимес од $f(x)$ једнак је b, када x тежи a". Примећујемо да f може, али не мора бити дефинисана у тачки a.

Ако се услов $0 < |x-a| < \delta$ у претходној дефиницији замени условом

$$a-\delta < x < a \ \text{ или } \ a < x < a+\delta,$$

онда је реч о ***левој***, односно ***десној граничној вредности*** функције f.

Пример 1.1. *Доказати да је* $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x+1} = -3.$

Решење. Домен функције $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$ је скуп $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, а тачка -1 није у скупу D, па $f(-1)$ не постоји. Међутим, како за свако $\epsilon > 0$ и $x \neq -1$ имамо да је

$$\begin{aligned} |f(x) - (-3)| < \epsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \left| \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} + 3 \right| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \left| \frac{(x-2)(x+1)}{x+1} + 3 \right| < \epsilon \Leftrightarrow |x - (-1)| < \epsilon, \end{aligned}$$

то за $\delta = \epsilon$ добијамо

$$0 < |x - (-1)| < \delta \Rightarrow |f(x) - (-3)| < \epsilon,$$

па је $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -3$.

Теорема 1.1. *Функција* $f : D \to \mathbb{R}$ *има граничну вредност* b *у тачки* a *ако и само ако има леву и десну граничну вредност и оне су међусобно једнаке, односно*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = b.$$

Неке функције имају граничну вредност када $x \to \infty$ или $x \to -\infty$, односно имају граничну вредност у бесконачности.

Дефиниција 1.3. *Нека је домен* D *функције* $f : D \to \mathbb{R}$ *неограничен интервал. Број* $b \in \mathbb{R}$ *је* ***гранична вредност*** *функције* f *када* $x \to +\infty$ *(или* $x \to -\infty$*) у ознаци* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ *(*$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$*), ако за свако* $\epsilon > 0$ *постоји број* $r > 0$ *(*$r < 0$*) тако да важи:*

$$\begin{aligned} &(\forall x \in D) \quad (x > r \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon), \\ &((\forall x \in D) \quad (x < r \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon)). \end{aligned}$$

Пример 1.2. *Доказати да је* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

Решење. За произвољно мало $\epsilon > 0$ имамо да је

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\epsilon} \wedge x < -\frac{1}{\epsilon}, \tag{1.1}$$

па ако је $r = \dfrac{1}{\epsilon}$, из (1.1) закључујемо да

$$(\forall x \in R) \ \left(x > r \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon\right),$$

што значи да је $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Уколико је $r = -\dfrac{1}{\epsilon}$, онда добијамо

$$(\forall x \in R) \ \left(x < r \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon\right),$$

па је и $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Дефиниција 1.4. *Нека је $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања скупа D. Функција $f : D \to \mathbb{R}$ има* ***бесконачну граничну вредност*** *$+\infty(-\infty)$ у тачки a, у ознаци $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$) ако за свако $r > 0$ ($r < 0$) постоји $\delta > 0$ тако да важи*

$$(\forall x \in D) \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > r),$$
$$((\forall x \in D) \quad (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < r)).$$

Аналогно се уводи лева, односно десна гранична вредност функције у тачки $a \in R$ ако је та гранична вредност $+\infty$ или $-\infty$.

Аритметичка својства лимеса

Теорема 1.2. *Ако је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c, \quad b, c \in \mathbb{R}$, онда је*

1) $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = kb, k \in \mathbb{R}$;

2) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$;

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = bc$;

4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}, c \neq 0$;

5) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |b|$.

Неке важније граничне вредности су:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Бесконачно мале и бесконачно велике функције

Дефиниција 1.5. *Функција $f : D \to \mathbb{R}$ је* ***бесконачно мала*** *када $x \to a$ ако је*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Следећа дефиниција врши упоређивање бесконачно малих функција формирањем њиховог количника и одређивањем граничне вредности тог количника.

Дефиниција 1.6. *Нека је*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \ \text{ и } \ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

1) *Ако је $k \in \mathbb{R}$ и $k \neq 0$, кажемо да су $f(x)$ и $g(x)$, када $x \to a$, бесконачно мале функције* ***истог реда****. Уколико је $k = 1$ онда кажемо да су $f(x)$ и $g(x)$* ***еквивалентне*** *или* ***асимптотски једнаке****, у ознаци $f(x) \sim g(x), x \to a$.*

2) *Ако је $k = 0$ каже се да је $f(x)$ бесконачно мала функција* ***вишег реда*** *од $g(x)$ када $x \to a$.*

3) *Ако је $k = \pm\infty$ каже се да је $f(x)$ бесконачно мала функција* ***нижег реда*** *од $g(x)$ када $x \to a$.*

Дефиниција 1.7. *Функција $f : D \to \mathbb{R}$ је* ***бесконачно велика*** *када $x \to a$ ако је*

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \ \text{или} \ \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Аналогно упоређивању бесконачно малих вршимо упоређивање бесконачно великих функција.

Дефиниција 1.8. *Нека су $f(x)$ и $g(x)$ две бесконачно велике функције када $x \to a$ и*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

1) *Ако је $k \in \mathbb{R}$ и $k \neq 0$, кажемо да су $f(x)$ и $g(x)$, када $x \to a$, бесконачно велике функције* ***истог реда****. Уколико је $k = 1$ онда кажемо да су $f(x)$ и $g(x)$* ***еквивалентне*** *или* ***асимптотски једнаке****, у ознаци $f(x) \sim g(x), x \to a$.*

2) *Ако је $k = 0$ каже се да је $f(x)$ бесконачно велика функција* ***нижег реда*** *од $g(x)$ када $x \to a$.*

3) *Ако је $k = \pm\infty$ каже се да је $f(x)$ бесконачно велика функција* ***вишег реда*** *од $g(x)$ када $x \to a$.*

1.2 Задаци

Одредити граничну вредност следећих функција:

1.1. $y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x-5}}$.

Решење. Директно решавамо ову граничну вредност:

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+2x-5}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(2-\dfrac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right)}} = \frac{2}{1} = 2.$$

1.2. $y = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x^2+x}{(x-2)(x^2+x+1)} - \dfrac{2}{x-2}\right)$.

Решење. Извршимо назначене операције међу разломцима у загради, па добијамо:

$$\begin{aligned} y &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{3x^2+x}{(x-2)(x^2+x+1)} - \frac{2}{x-2}\right) \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{3x^2+x-2x^2-2x-2}{(x-2)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

1.3. $y = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(5x-1)(2x+3)(x-9)}{4x^3+x-3}$.

Решење. Ослобађањем од заграда у бројиоцу разломка, добијамо:

$$\begin{aligned} y &= \lim_{x\to\infty}\frac{(5x-1)(2x+3)(x-9)}{4x^3+x-3} = \lim_{x\to\infty}\frac{10x^3-77x^2-120x+27}{4x^3+x-3} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(10-\dfrac{77}{x}-\dfrac{120}{x^2}+\dfrac{27}{x^3}\right)}{x^3\left(4+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right)} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

1.4. $y = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$.

Решење. Разлагањем полинома у разломку, добијамо:

$$y = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}}-6\right)}{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{-6}{3} = -2.$$

1.5. $y = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$.

Решење. Граничну вредност израчунавамо разлагањем полинома у разломку:

$$y = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}.$$

1.6. $y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

Решење. Проширивањем разломка, добијамо (користећи правило $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$):

$$\begin{aligned} y &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+3x}+1}{\sqrt{1+3x}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{3x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x}+1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

1.7. $y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$.

Решење. Очигледно се ова гранична вредност израчунава проширивањем разломка:

$$\begin{aligned} y &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1+x-1+x}{4x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{4x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{1}{2(1+1)} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

1.8. $y = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$.

Решење. Граничну вредност израчунавамо проширивањем датог израза разломком:

$$\begin{aligned} y &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3-4}{(x^2-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

1.9. $y = \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+3x}-x)$.

Решење. И ова гранична вредност се израчунава проширивањем разломка, па добијамо:

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)\frac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{x^2+3x}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x(\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}\right)}+1)}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

1.10. $y=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})$.

Решење. Проширивањем датог израза разломком, добијамо:

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1})\frac{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1-x^2+x-1}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right)}=\frac{2}{1+1}=1.
\end{aligned}$$

1.11. $y=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+5}-\sqrt{x^2-3x-5})$.

Решење. Опет вршимо проширивање датог израза разломком:

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+5}-\sqrt{x^2-3x-5})\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x+5}+\sqrt{x^2-3x-5}}{\sqrt{x^2+3x+5}+\sqrt{x^2-3x-5}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+5-(x^2-3x-5)}{\sqrt{x^2+3x+5}+\sqrt{x^2-3x-5}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+5-x^2+3x+5}{\sqrt{x^2+3x+5}+\sqrt{x^2-3x-5}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6x+10}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(6+\frac{10}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}\right)} = \frac{6}{1+1} = 3.
\end{aligned}
$$

1.12. $y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

Решење. Ова гранична вредност израчунава проширивањем разломка (и то користећи правило $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$):

$$
\begin{aligned}
y &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2-1}{x^2(\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

1.13. $y = \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{(x^2-1)^2})$.

Решење. Очигледно се ова гранична вредност израчунава проширивањем разломка (и то користећи правило $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$):

$$
\begin{aligned}
y &= \lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{(x^2-1)^2}) = \lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{(x^2-1)^2}) \\
&\cdot \frac{\sqrt[3]{x^8}+\sqrt[3]{x^4(x^2-1)^2}+\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}{\sqrt[3]{x^8}+\sqrt[3]{x^4(x^2-1)^2}+\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4-(x^2-1)^2}{\sqrt[3]{x^8}+\sqrt[3]{x^4(x^2-1)^2}+\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4-x^4+2x^2-1}{\sqrt[3]{x^8}+\sqrt[3]{x^4(x^2-1)^2}+\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(2-\dfrac{1}{x^2})}{\sqrt[3]{x^8}\left(1+\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}+\sqrt[3]{1+\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{1}{x^8}+\dfrac{2}{x^4}-\dfrac{4}{x^6}-\dfrac{4}{x^2}}\right)} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

1.14. $y = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{4}}{x-4}$.

Решење. Очигледно се ова гранична вредност израчунава проширивањем датог израза разломком:

$$\begin{aligned} y &= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{4}}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{4}}{x-4} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{4x} + \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{4x} + \sqrt[3]{4^2}} \\ &= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)}{(x-4)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{4x} + \sqrt[3]{4^2})} = \frac{1}{3\sqrt[3]{16}} = \frac{1}{6\sqrt[3]{2}}. \end{aligned}$$

1.15. $y = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

Решење. Ова гранична вредност се израчунава проширивањем датог израза (коришћењем правила $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$ и $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$):

$$\begin{aligned} y &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

1.16. $y = \lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$.

Решење. Као и у претходном примеру имамо да је:

$$\begin{aligned} y &= \lim_{x\to -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x} + 3}{\sqrt{1-x} + 3} \cdot \frac{4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}} \\ &= \lim_{x\to -8} \frac{(1 - x - 9)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(8+x)(\sqrt{1-x} + 3)} \\ &= \lim_{x\to -8} \frac{-(x+8)(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(8+x)(\sqrt{1-x} + 3)} \\ &= \lim_{x\to -8} \frac{-(4 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{\sqrt{1-x} + 3} = \frac{-(4 - 2(-2) + 4)}{3+3} = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

1.17. $y = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{8\sqrt{x} - x^2}{8 - 4\sqrt{x}}$.

Решење. Извршимо проширивање разломка:

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{x\to 4} \frac{8\sqrt{x}-x^2}{8-4\sqrt{x}} \cdot \frac{8+4\sqrt{x}}{8+4\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{(8\sqrt{x}-x^2)(8+4\sqrt{x})}{64-16x} \cdot \frac{8\sqrt{x}+x^2}{8\sqrt{x}+x^2} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{(64x-x^4)(8+4\sqrt{x})}{16(4-x)(8\sqrt{x}+x^2)} = \lim_{x\to 4} \frac{x(64-x^3)(8+4\sqrt{x})}{16(4-x)(8\sqrt{x}+x^2)} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{x(4-x)(16+4x+x^2)(8+4\sqrt{x})}{16(4-x)(8\sqrt{x}+x^2)} \\
&= \frac{(8+8)4(16+16+16)}{16(16+16)} = 6.
\end{aligned}$$

1.18. Користећи једнакост

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

израчунати:

1) $y = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{(1-x^3)}$;

2) $y = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Решење.

1) Користећи претходну једнакост имамо да је:

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{(1-x^3)} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{-(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{(x-1)} \\
&\cdot \lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x^2+x+1)} = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

2) Да би решили другу граничну вредност уводимо смену

$$t = \operatorname{arctg} x \ \Rightarrow x = \operatorname{tg} t,$$

ако тада $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$. Тада је:

$$y = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\operatorname{tg} t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{\sin t}{\cos t}} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{\lim\limits_{t\to 0} \cos t}{\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}} = 1.$$

1.19. Користећи једнакост

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

израчунати:

1) $y = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$;

Решење.

1) Користећи претходну једнакост имамо да је:

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\cfrac{1}{\cfrac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2}{x-1}\cdot x} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\cfrac{1}{\cfrac{x-1}{2}}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x-1}} \\
&= e^2.
\end{aligned}$$