Предмет: Математика 2 (предавања)
Предметни наставник: Проф. др Љиљана Пауновић
Датум предавања: 19. март 2020. год.
Одсек: Разредна настава

Глава 1

Гранична вредност низа

Нека је $a \in \mathbb{R}$ и ε произвољан позитиван реалан број. Отворен интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ називамо ε-***околина*** броја a.

Дефиниција 1.1. *Број $a \in \mathbb{R}$ је* ***тачка нагомилавања*** *низа (a_n) ако се у свакој ε-околини броја a налази бесконачно много чланова тог низа, односно ако за свако $\varepsilon > 0$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ постоји $n \in \mathbb{N}$, такво да је $n > n_0$ и $|a_n - a| < \varepsilon$.*

Пример 1.1. *Одредити тачке нагомилавања низа $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.*

Решење. Овај низ има две тачке нагомилавања: 1 и -1. Заиста, ако конструишемо поднизове

$$a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k}, \quad a_{2k-1} = -1 - \frac{1}{2k-1},$$

низа (a_n), онда лако уочавамо да се у ма којој ε-околини броја 1 налази бесконачно много чланова подниза (a_{2k}), а самим тим и низа (a_n), што значи да је 1 тачка нагомилавања низа (a_n). Аналогно, посматрајући подниз (a_{2k-1}) закључујемо да је -1 тачка нагомилавања низа (a_n).

Теорема 1.1. [Болцано-Вајерштрас] *Сваки ограничен низ има бар једну тачку нагомилавања.*

Дефиниција 1.2. *Реалан низ* (a_n) ***конвергира*** *ка броју* $a \in \mathbb{R}$ *и* a *му је* ***гранична вредност (лимес)****, у ознаци*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a,$$

ако за свако $\varepsilon > 0$ *постоји* $n_0 \in \mathbb{N}$ *такво да*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

За низ (a_n) *тада се каже и да је* ***конвергентан*** *ка* a*.*

На основу наведених дефиниција можемо закључити да гранична вредност низа јесте његова тачка нагомилавања, док обрнуто не мора да важи.

Теорема 1.2. *Сваки конвергентан низ је ограничен.*

Напоменимо да обрнуто не мора да важи. Наиме, постоје низови који су ограничени, а нису конвергентни. Такав је на пример низ $(-1)^{n-1}$. Он је ограничен јер је

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| = |(-1)^{n-1}| < 2.$$

Посматрани низ није конвергентан јер има две тачке нагомилавања 1 и -1.

Теорема 1.3. *Монотон и ограничен низ конвергира.*

Дефиниција 1.3. *Низ* (a_n) ***дивергира ка*** $+\infty$*, у ознаци*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty,$$

ако за произвољан реалан број $r > 0$ *постоји* $n_0 \in \mathbb{N}$ *тако да*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (n > n_0 \Rightarrow a_n > r).$$

Аналогно дефинишемо ***дивергенцију ка*** $-\infty$***.***

Број e

У математичкој анализи и њеним применама често се јављају низови са општим чланом

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad \text{и} \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Доказаћемо да су ови низови конвергентни.

Размотримо најпре низ (a_n). Како је

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0,$$

то је $a_n < a_{n+1}$, за свако $n \in \mathbb{N}$, а то значи да је низ (a_n) строго растући. Ако у општем члану низа (a_n) имениоце напишемо у развијеном облику, добијамо

$$a_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}. \tag{1.1}$$

Како је $n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 > 2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = 2^{n-1}$, то је

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}, \quad n = 3, 4, \ldots \tag{1.2}$$

На основу (1.1) и (1.2) имамо да је

$$\begin{aligned} a_n &< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 + \frac{1 - (1/2)^n}{1 - (1/2)} \\ &= 1 + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 3. \end{aligned}$$

Користили смо чињеницу да је израз у загради збир геометријског низа. Из (1.1) закључујемо да је $a_n > 2$ за $n > 1$. Према томе је , за $n > 1$,

$$2 < a_n < 3, \tag{1.3}$$

што значи да је низ (a_n) ограничен.

Дакле, низ (a_n) је ограничен одозго и строго растући, па је на основу Теореме 1.3. конвергентан. Његову граничну вредност означавамо са e, тј.

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

Може се показати да је то ирационалан број и да је $e = 2,7182818284\ldots$

Размотримо сада низ (b_n). Користећи биномну формулу имамо да је

$$
\begin{aligned}
b_n &= 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \dots \\
&+ \frac{n(n-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) \\
&+ \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = a_n < 3,
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

за $n > 1$.

На основу Бернулијеве неједнакости која гласи: $(1+h)^n > 1 + nh$, за сваки природан број $n > 1$ и реалан број $h > -1$ и $h \neq 0$, имамо

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1 + n\cdot\frac{1}{n} = 2,$$

за $n > 1$, што заједно са (1.4) даје

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Према томе, низ (b_n) је ограничен. Даље, на основу биномне формуле имамо

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \\
\dots &\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

Ако упоредимо b_n и b_{n+1}, закључујемо је

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ b_n \leq b_{n+1},$$

па је низ (b_n) растући.

Дакле, доказали смо да је низ (b_n) ограничен и монотон, што на основу Теореме 1.3. значи да је он конвергентан. Може се доказати да је гранична вредност овог низа иста као и гранична вредност низа (a_n), тј.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Примећујемо да важе и релације

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=e.$$

У математици број e има посебан значај и уз број π је једна од најважнијих константи.