Проф. др Алија Мандак

редовни професор

УЧИТЕЉСКИ ФАКУЛТЕТ У ПРИЗРЕНУ

Л Е П О С А В И Ћ

Г Е О М Е Т Р И Ј А

РАЗВОЈ ГЕОЕМЕТРИЈЕ

Геометрија је једна од најстаријих математичких дисциплина. Осврнимо се укратко на историјски развој геометрије:

1. Реч *геометрија* значи *земљомерство*, а настала је у Египту због неопходности мерења иамања и означавања међа после поплава Нила. Геометрија се у прошлости бавила изучавањем положаја, облика и величина предмета реалног света, док данас изучава апстрактне објекте. У почетку се до општих особина долазило на основу неколико екперимената, посматрањем и интуицијом, односно, *индуктивном методом* (непотпуном индукцијом). Наведени метод био је погодан само за неке простије фигуре.

2. У 6. веку пре.н.е. Грци су преузели од Египћана и Вавилонаца водећу улогу у развоју геометрије, углавном заслугама *Талеса* и *Питагоре.* Поред њих, велики допринос развоју геометрије тог доба дали су и *Платон* и *Аристотел* који дају прве наговештаје аксиоматског заснивања геометрије. У овом периоду индуктивни метод замењен је дедуктивним и приступа се систематском излагању чињеница.

3. Око 300. година пре н.е. *Еуклид* је објавио своје капитално дело *Елементи*, сачињено од 13 књига, које представљају врхунац дедуктивног метода и дају највећи допринос развоју геометрије. Поред свих добрих страна овог дела, уочени су следећи недостаци:

- дефинишу се основни појмови,
- аксиоме Еуклидовог система нису међусобно независне,
- прилоком доказивања тврђења Еуклид се често ослањао на слике и тиме чинио доказ некоректним.

4. У 1. и 2. веку пре н.е. уводи се равна и сферна тригонометрија.

5. У првој половини 17. века *Декарт* развија аналитичку геометрију.

6. У 18. веку долази до открића диференцијалне геометрије.

7. У првој половини 19. века *Лобачевски* уводи нееуклидску геометрију.

8. Крајем 19. века *Хилберт* је дао систематизацију геометрије у делу *Основи геометрије.*

Основе Хилбертовог система аксиома

У даљем тексту изложићемо аксиоме Еуклидске геометрије, базиране на Хибертовом систему аксиома. У Хибертовом систему аксиома основни појмови су:

- *тачка* (означавамо их великим словима *A, B, C ...*),
- *права* (означавамо их малим словима *a, b, c ...*),
- *раван* (означавамо их малим грчким словима *α, β, γ ...*),

а основне релације представљају релације:

- *припада ("се садржи")*. Да тачка *A* припада правој *q* (prava *q* садржи тачку *A*) означавамо $A \in q$,
- *између,*
- *подударно,*
- *паралелно.*

Систем аксиома представљен је у пет група аксиома:

I *аксиоме везе* (или *припадности* или *инцидентности*),

II *аксиоме распореда,*

III *аксиоме подударности,*

IV *аксиоме непрекидности,*

V *аксиома паралелности.*

ДЕФИНИЦИЈА 1: Скуп свих тачака називамо простор и означавамо га са E_3.

Аксиоме везе

ДЕФИНИЦИЈА 2: Три или више тачака су колинеарне ако постоји права која их садржи (тачке припадају истој правој).

ДЕФИНИЦИЈА 3: Четири или више тачака су компланарне ако постоји раван која их садржи (тачке припадају истој равни).

Аксиоме везе чине групу од 7 аксиома:

Аксиома I 1. Свака права садржи најмање две различите тачке.

Аксиома I 2. За сваке две различите тачке постоји једна и само једна права која их садржи.

Аксиома I 3. Свака раван садржи најмање три неколинеарне тачке.

Аксиома I 4. За сваке три неколинеарне тачке постоји једна и само једна раван која их садржи.

Аксиома I 5. Ако две различите тачке неке праве припадају једној равни, онда све тачке те праве припадају тој равни (тј. права припада равни).

Аксиома I 6. Ако две равни имају заједничку тачку, тада оне имају најмање још једну заједничку тачку (тј. имају заједничку праву).

Аксиома I 7. постоје четири некомплементарне тачке.

Наведеним аксиомама су потпуно одређени сви односи између тачака, правих и равни.

ТЕОРЕМА 1: Две различите праве имају највише једну заједничку тачку.

Доказ: Претпосатвимо супротно, две различите праве p и q имају бар две заједничке различите тачке A и B. На основу аксиоме I 2 тачке A и B одређују једну и само једну праву која их садржи, па је $p = q$, што је контрадикција са полазном претпоставком.

ДЕФИНИЦИЈА 4: За две праве p и q каже се да се секу ако имају само једну заједничку тачку A, у ознаци $p \cap q = A$.

Ако на правој q постоје различите тачке A и B, онда ћемо праву q често означавати и са $p(A,B)$.

ТЕОРЕМА 2: Две праве које се секу одређују једну и само једну раван.

Доказ: Нека се праве p и q секу у тачки A. Према аксиоми I 1 на правој p, сем тачке A, постоји бар још једна тачка, на пример тачка B. Аналогно важи и за праву q. Ове три тачке су неколинеарне, те према аксиоми I 4 постоји једна и само једна раван α која их садржи, а према аксиоми I 5 праве p и q припадају равни α. То значи да ове две праве одређују раван α.

ТЕОРЕМА 3: Права и тачка ван дате праве одређују једну и само једну раван.

Доказ: Нека је p права и A тачка која јој не припада. Према аксиоми I 1 на правој p постоје две различите тачке, нпр. B и C. Тада су A, B и C три неколинеарне тачке, па према аксиоми I 4 постоји једна и само једна раван α која их садржи. Према томе B и C припадају равни α. Према аксиоми I 5 следи да и права p припада равни α. Јединственост равни α следи на основу аксиоме I 4.

Аксиоме распореда

Аксиомама распореда ближе су утврђене особине релације “између” за три колинеарне тачке. Уколико је тачка *B* између тачака *A* и *C* то ћемо означавати *A–B–C* . Аксиоме распореда чине групу од 6 аксиома:

Аксиома II 1. Нека су A, B и C три колинеарне тачке за које је A–B–C . Тада су сваке две од наведених тачака различите.

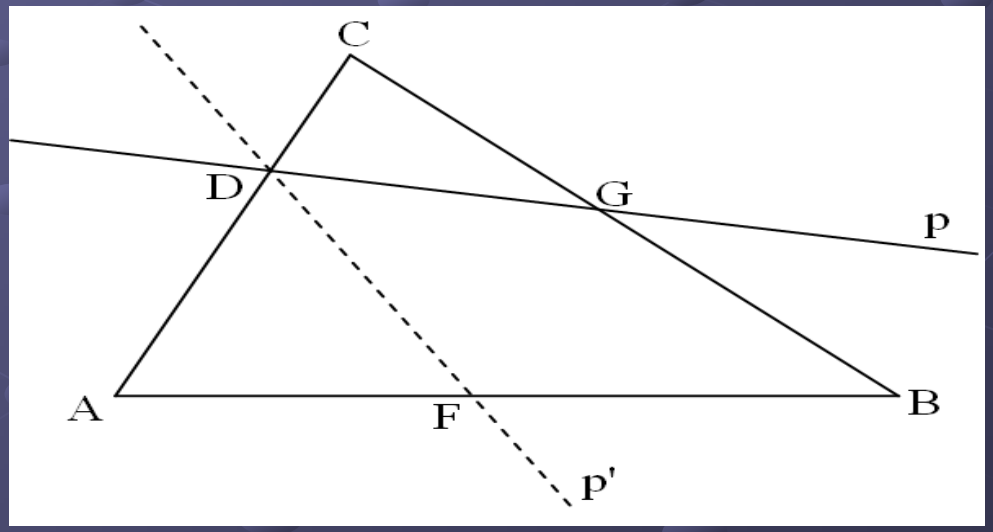
Аксиома II 2. Нека су A, B и C три колинеарне тачке за које је A–B– C . Тада је C–B–A.

Аксиома II 3. Нека су A, B и C три колинеарне тачке за које је A – B – C . Тада није A – C – B.

Аксиома II 4. Нека су A и B две различите тачке праве p. Тада постоји тачка C∈p, таква да је A–B–C .

Аксиома II 5. Нека су A, B и C три колинеарне тачке. Тада важи бар једна од три релације: A– B– C, A–C–B или *C–A–B.*

Аксиома II 6. (Пашова аксиома) Нека су A, B и C три неколинеарне тачке и p права која припада равни одређеној тачкама A, B и C, тако да не садржи тачку B и сече праву p(A,C) у тачки D тако да је A–D–C. Тада права p сече праву p(B,C) у тачки G тако да је B– G– C или сече праву p(A,B) у тачки F тако да је A–F– B.



Слика 1.

На основу *аксиома II 4* и *II 6* могуће је доказати следећу теорему.

ТЕОРЕМА 4: Нека су A, B и C три колинеарне тачке. Тада важи једна и само једна од три релације: A–B–C, A– C– B или C–A–B .

ДЕФИНИЦИЈА 5: За две различите тачке A и B, скуп наведених тачака и тачака праве p(A,B) између A и B називамо дуж, и ознаци AB. Тачке A и B називамо крајеви, а остале тачке унутрашње тачке дужи.

На основу *аксиома II 5, II 1* и *II 3* могуће је доказати следећу теорему.

ТЕОРЕМА 5: Свака дуж садржи бар једну унутрашњу тачку.

На основу наведене теореме могуће је показати да постоји бесконачно много унутрашњих тачака сваке дужи.

ДЕФИНИЦИЈА 6: Дуж AB код које је одређено да је A почетна и B крајња тачка називамо орјентисана дуж, и ознаци $\overrightarrow{AB}$.

ДЕФИНИЦИЈА 7: Нека су A, B и C три различите тачке праве p, такве да је A–B–C. Тада кажемо да су тачке A и C праве p са разних страна у односу на тачку B , а да су тачке B и C праве p са исте стране у односу на тачку A (или да су тачке A и B праве p са исте стране у односу на тачку C).

ДЕФИНИЦИЈА 8: Нека је дата права p и тачка O која јој припада. Скуп тачака праве p одређен тачком O и свим тачкама праве p са исте стране тачке O називамо полуправа, у ознаци Op. Тачку O називамо почетком полуправе.

ДЕФИНИЦИЈА 9: Нека је дата раван α. Нека права p и тачке A и B припадају равни α. Тада кажемо да су тачке A и B равни α са исте стране праве p уколико дуж AB нема заједничких тачака са правом p. Ако постоји једна заједничка тачка кажемо да су тачке A и B равни α са разних страна праве p.

ДЕФИНИЦИЈА 10: Полураван са граничном правом p равни α је скуп свих тачака праве p и свих тачака равни α које су са исте стране праве p, у ознаци pα.

Тачка на правој одређује две полуправе, права у равни две полуравни, а раван у простору два полупростора.

ДЕФИНИЦИЈА 11: Угаона линија, у ознаци pOq, је унија две полуправе Op и Oq са заједничком почетном тачком O. Тачку O називамо теме, а полуправе Op и Oq краци угаоне линије.

На основу *теореме 2* могуће је доказати следећу теорему:

ТЕОРЕМА 6: Угаона линија припада једној и само једној равни.

ДЕФИНИЦИЈА 12: Угаона линија pOq дели раван којој припада на два дела које називамо угаоне области.

ДЕФИНИЦИЈА 13: Угао, у ознаци <pOq је унија угаоне линије pOq и једне њене угаоне области. Тачку O називамо теме, а полуправе Op и Oq краци угла. (Угаона линија pOq одређује два угла).

ДЕФИНИЦИЈА 14: Нека краци <pOq пропадају истој правој. Тада ако је:

1) Op≠Oq онда <pOq називамо опружен угао,

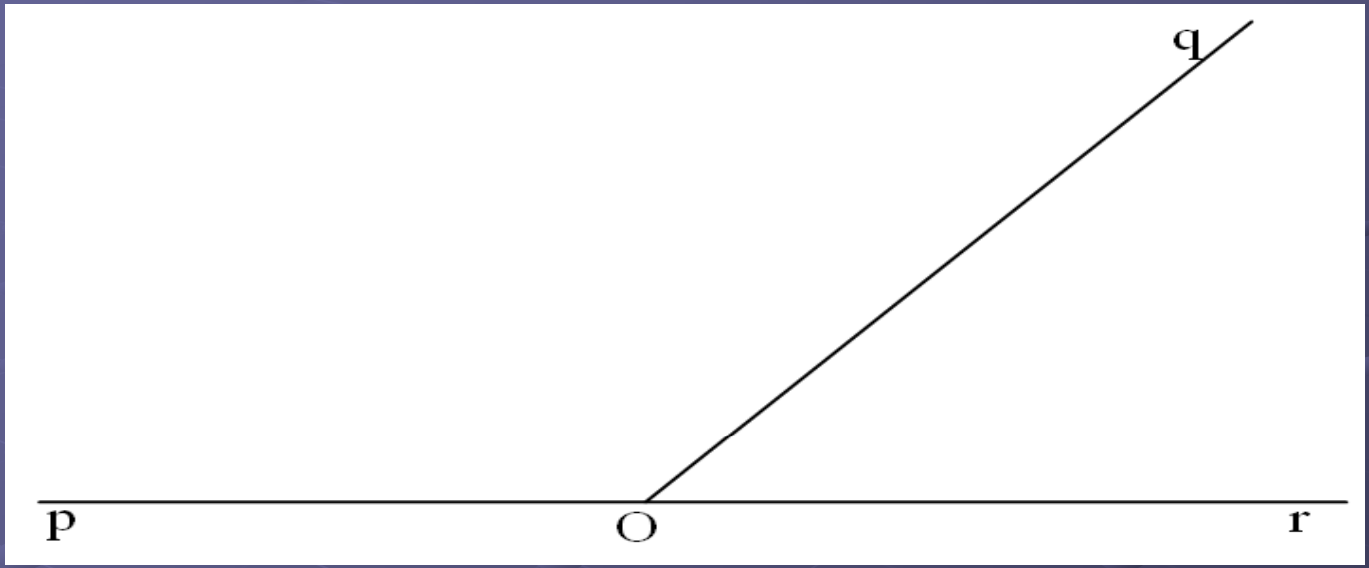
2) Op=Oq

а) и угаона област је празан скуп, онда <pOq називамо нула угао,

б) и гаона област је скуп свих тачака које не припадају тој угаоној линији, онда <pOq називамо пун угао.

ДЕФИНИЦИЈА 15: За <pOq и <qOr кажемо да су суседни. Наведене суседне углове називамо упоредним ако краци Op и Or припадају истој правој и при томе Op≠Or (Слика 2.)

Тачка на правој одређује две полуправе, права у равни две полуравни, а раван у простору два полупростора.



Слика 2.

ДЕФИНИЦИЈА 16: Угао називамо:

1) прав – ако је једнак свом упоредном углу,

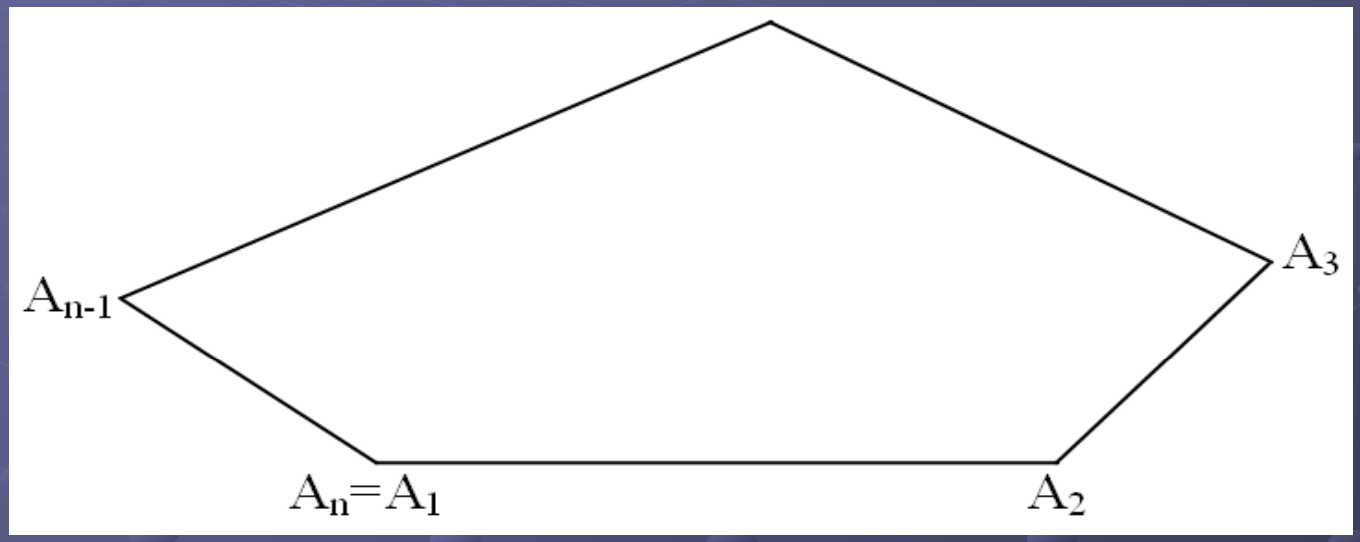
2) оштар – ако је мањи од свог упоредног угла,

3) туп – ако је већи од свог упоредног угла.

ДЕФИНИЦИЈА 17: За $n \geq 3$ нека је $A_1, A_2, \ldots A_n$ коначан скуп исте равни где никоје три тачке нису колинеарне. Унију дужи $A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_{n-1}A_n$ називамо изломљена линија. Ако је

1) $A_1 \neq A_n$ изломљена линија је отворена,

2) $A_1 = A_n$ изломљена линија је затворена и назива се многоугаона линија или многоугао. Тачке $A_1, A_2, \ldots A_n$ су темена, а дужи $A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_{n-1}A_n$ су странице многоугла (слика 3.) многоугао дели раван којој припада на две области, унутрашњу и спољашњу.



Слика 3.

ДЕФИНИЦИЈА 18: Многоугао је:

1) прост – ако никоје две странице немају заједничких тачака, осим што суседне две странице имају заједничка темена,

2) сложен – у супротном

ДЕФИНИЦИЈА 19: Многоугаона површ је унија свих тачака многоугла и његове унутрашње области.

Аксиоме подударности

Историјски гледано, релацију “подударно”, која се односи на две дужи, разматрали су редом: Еуклид, Пеано, Хилберт, Паш, Веронез, Борсука и Шмиелеве. Ако су дужи AB и CD у релацији подударно, то пишемо $AB \cong CD$, кажемо да су оне једнаке. Аксиоме подударности дају особине релације подударно и оне чине групу од 7 аксиома:

Аксиома III1. Ако је $AB \cong CD$ и $A=B$ тада је $C= D$.

Аксиома III 2. $AB \cong BA$

Аксиома III 3. Ако је $AB \cong CD$ и $AB \cong EF$, тада је $CD \cong EF$.

Аксиома III 4. Ако тачка C припада дужи AB и тачка C' дужи $A'B'$, при чему је $AC \cong A'C'$ и $BC \cong B'C'$, тада је $AB \cong A'B'$.

Аксиома III 5. Нека су A и B различите тачке и C почетна тачка полуправе Cp. Тада на полуправој Cp постоји тачка D таква да $AB \cong CD$.

Аксиома III 6. Нека су A, B и C три неколинеарне тачке и нека су A' и B' две тачке граничне праве p полуравни $p\alpha$, такве да је $AB \cong A'B'$. Тада у полуравни $p\alpha$ постоји једна и само једна тачка C' таква да је $AC \cong A'C'$ и $BC \cong B'C'$.

Аксиома III 7. Нека су A, B и C и A', B' и C' две тројке неколинеарних тачака редом, а D и D' тачке полуправих BC и $B'C'$ такве да је: $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $CA \cong C'A'$ и $BD \cong B'D'$. Тада је $AD \cong A'D'$.

Елементарно се доказује следећа теорема.

ТЕОРЕМА 7. На скупу дужи релација подударности је релација еквиваленције.

ДЕФИНИЦИЈА 20. Тачка S је средиште дужи AB ако је $S \in AB$ и $AS \cong BS$.

ДЕФИНИЦИЈА 21. Тачке B и C су једнако удаљене од тачке A ако је $AB \cong AC$.

Аксиоме непрекидности

На основу претходно наведених аксиома ми смо у могућности да утврдимо да ли постоји једнакост две дужи. Да би смо могли установити процес мерења дужи, до сад наведене аксиоме нису довољне. Мерење дужи заснива се на асиоми, познатој као *Архимедова аксиома,* која омогућава да се за сваку дуж само на један начин одреди неки позитиван број који називамо *дужином дужи.*

Потребно је утврдити и обрнуто – постојање дужи чија је дужина једнака унапред датом позитивном броју. Значи, потребно је увести још једну аксиому на основу које би ово било могуће.

Аксиома IV 1. (Архимедова) Нека су AB и CD произвољне дужи. Тада на полуправој AB постоји коначан број тачака $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ таквих да је

1) $A - A_1 - A_2, A_1 - A_2 - A_3, \ldots A_{n-2} - A_{n-1} - A_n$,

2) $CD \cong AA_1 \cong A_1A_2 \cong \ldots \cong A_{n-1}A_n$,

3) $B\ A_{n-1}A_n$ *и* $B \neq A_{n-1}$.

Аксиома IV 2. (Канторова) Нека је на било којој правој p дат бесконачан низ дужи $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$, таквих да

1) свака следећа лежи унутар претходне ($A_{n+1}B_{n+1}\ A_nB_n$, $n=1,2, \ldots$),

2) не постоји дуж која лежи унутар свих дужи датог низа.

Тада на правој p постоји тачка C која припада свим дужима тога низа.

Аксиома паралелности

Еуклидска геометрија је геометрија у којој важи следећа аксиома, позната и као пети Еуклидов постулат.

Потребно је утврдити и обрнуто – постојање дужи чија је дужина једнака унапред датом позитивном броју. Значи, потребно је увести још једну аксиому на основу које би ово било могуће.

Аксиома V 1. У равни α одређеној правом p и тачком A p постоји једна и само једна права q која садржи тачку A и нема заједничких тачака са правом p.

На бази прве четири групе аксиома (апсолутна геометрија) и другачијим интерпретацијама наведене скиоме изграђују се тзв. *нееуклидске геометрије.*

ДЕФИНИЦИЈА 22. Праве p и q су паралелне, у ознаци p II q, ако је p = q или p и q припадају истој равни и немају заједничких тачака.

ДЕФИНИЦИЈА 23. Две праве се мимоилазе ако не припадају истој равни.

ТЕОРЕМА 8. Две различите паралелне праве одређују једну и само једну раван.

На основу аксиоме паралелности могуће је доказати следећу теорему.

ТЕОРЕМА 9. На скупу правих, релација паралелности је релација еквиваленције.

ДЕФИНИЦИЈА 24. Права p је паралелна равни α, у ознаци p II α, ако јој припада или ако са њом нема заједничких тачака.

ДЕФИНИЦИЈА 25. Две равни α и β су паралелне, у ознаци α II β, ако су једнаке или ако са њом нема заједничких тачака.

ГЕОМЕТРИЈСКЕ ФИГУРЕ

ДЕФИНИЦИЈА 26: Нека се праве $p(AB) = q$ и p секу у тачки S која је средиште дужи AB. Ако је при томе $\angle pSq$ прав угао кажемо да је права p симетрала дужи AB.

- За наведене праве p и q кажемо да су нормалне и то означавамо $q \perp p$.

ДЕФИНИЦИЈА 27: Нека је ρ бијективно пресликавање скупа тачака X на скуп тачака X'. Ако је

$$(\forall A, B \in X)(AB \cong \rho(A)\rho(B)),$$

Тада кажемо да је ρ изометријска трансформација.

ДЕФИНИЦИЈА 28: За геометријске фигуре F_1 и F_2 кажемо да су подударне ако постоји изометријска трансформација ρ таква да је $\rho(F_1) = F_2$.

ТРОУГАО, ЧЕТВОРОУГАО И КРУГ

ДЕФИНИЦИЈА 29: Троугао је многоугао са три странице.

На основу величине страница троуглове делимо на:

1. Једнакостраничне (једнаке све три стране)
2. Једнакокраке (једнаке две странице)
3. Разностраничне (све три странице различите)

На основу величине углова троуглове делимо на:

1. Правоугле (један угао прав)
2. Оштроугле (сви углови оштри)
3. Тупоугле (један угао туп)

Ставови о подударности троуглова

Став 1: Два троугла су подударна ако су две странице и њима захваћен угао једног троугла подударни одговарајућим двема страницама и одговарајућем углу другог троугла.

Став 2: Два троугла су подударна ако су једна страница и на њој налегла два угла једног троугла подударни одговарајућој страници и одговарајућим угловима другог троугла.

Став 3: Два троугла су подударна ако су све три странице једног троугла подударне одговарајућим страницама другог троугла.

Став 4: Два троугла су подударна ако су две странице и угао наспрам веће од њих једног троугла подударне одговарајућим страницама и одговарајућем углу другог троугла.

Важне теореме

Теорема 10: У троуглу наспрам веће странице лежи већи угао. Важи и обрнуто тврђење.

Теорема 11: Углови на основици једнакокраког троугла су једнаки.

Теорема 12: Збир три унутрашња угла троугла једнак је збиру два права угла.

Теорема 13: Збир ма које две странице троугла већи је од треће странице. Разлика ма које две странице троугла мања је од треће странице.

ЧЕТВОРОУГАО

Дефиниција 30: Четвороугао је многоугао са четири странице.

- Према броју паралелних страница четвороуглове делимо на:
  1. Паралелограм (два пара паралелних страница)
  2. Трапез (један пар паралелних страница)
  3. Трапезоид (без паралелних страница)

Теорема 14: За сваки паралелограм важи:

1. Наспрамне странице (углови) су једнаке
2. Збир суседних углова једнак је збиру два права угла
3. Дијагонале се полове

Дефиниција 31: Правоугаоник је паралелограм чији су сви углови једнаки (прави углови)

Дефиниција 32: Квадрат је правоугаоник чије су све странице једнаке.

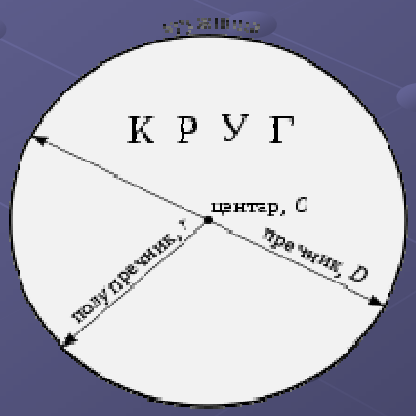
Теорема 15: Паралелограм је квадрат ако и само ако су му дијагонале једнаке.

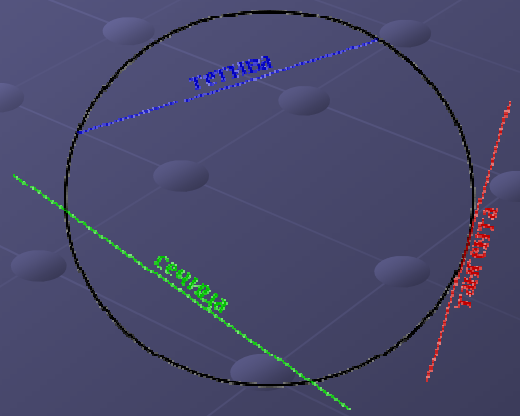
Теорема 16: Правоугаоник је квадрат ако и само ако важи:

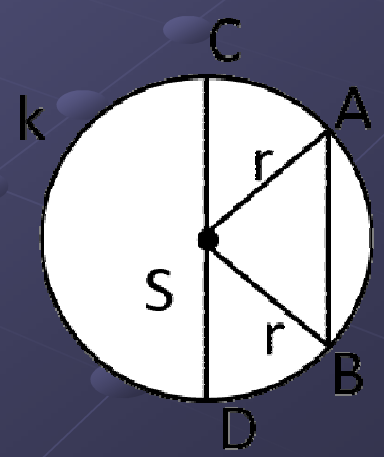
1. Дијагонале се секу под правим углом (нормалне су)
2. Дијагонала дели угао на два једнака угла (дијагонала је симетрала угла)

КРУГ

ДЕФИНИЦИЈА 33: *Нека су дате тачка O и дуж r равни α . Скуп свих тачака A равни α таквих да је OA=r назива се кружница, док се скуп тачака A равни α таквих да је $OA \leq r$ назива круг. Наведени круг означавамо са $k(O,r)$. Тачку O називамо центар, а дуж r полупречник круга.*







Геометријске фигуре у простору

- Унија две полуравни α, β (стране диедра) са заједничком граничном правом p (ивица диедра) назива се диедарска површ, у ознаци $\alpha p \beta$. Диедарска површ дели простор на два дисјунктна дела које називамо диедарске области.

Дефиниција 34: Диедар, у ознаци $\angle \alpha p \beta$ је унија диедарске површи $\alpha p \beta$ и једне од области одређене том површи.

Дефиниција 35: Нека је $A_1, A_2, \ldots, A_n$ многоугао и S тачка која не припада равни у којој лежи многоугао. Рогаљ је скуп свих полуправих са заједничком почетном тачком S које садрже по једну тачку датог многоугла.

1. Тачка S је врх рогља
2. Полуправе $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$ су ивице рогља
3. Углови $\angle A_1SA_2, \angle A_2SA_3, \ldots, \angle A_nSA_1$ су стране или ивични углови

Дефиниција 36: Полиедар је унија многоугаоних површи које потпуно ограничавају део простора, са тим делом простора.

Дефиниција 37: Правилан полиедар је полиедар чије су странице правилне и подударне многоугаоне површи.

Дефиниција 38: Призма је полиедар са две додударне многоугаоне површи које припадају различитим паралелним равнима (основе призме). Преостале странице се називају бочне странице.

Дефиниција 39: Призма је права ако су бочне ивице нормалне на основу (у супротном је коса). Правилна призма је права призма чија је основа правилан многоугао. Дијагонални пресек призме је пресек призме са равни која садржи две несуседне бочне ивице призме.

Дефиниција 40: Паралелопипед је призма чија је основа паралелограм.

Дефиниција 41: Квадар је прави паралелопипед чија је основа правоугаоник.

Дефиниција 42: Коцка је квадар чије су све стране квадрати.

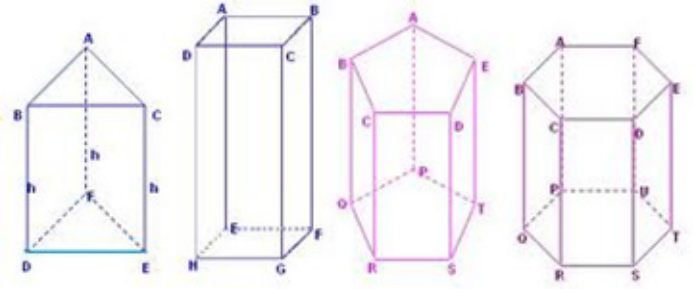
Дефиниција 43: Пирамида је полиедар чија је једна страна (основа) многоугаона површ, а остале бочне стране су троугаоне површи које образују рогаљ.

Дефиниција 44: Ваљкаста површ је фигура која се добија обртањем правоугаоника око осе која садржи једну његову страницу. Ваљак је фигура која се добија обртањем одговарајуће правоугаоне површи око наведене осе.

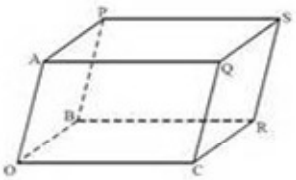
ДЕФИНИЦИЈА 45: Права кружна конусна површ је фигура која се добија обртањем правоуглог троугла око осе која садржи једну његову катету. Права купа је фигура која се добија обртањем одговарајуће троугаоне површи око наведене осе.

ДЕФИНИЦИЈА 46: Нека су дате тачка O и дуж r простора E_3. Скуп свих тачака A датог простора таквих да је OA=r назива се сфера, док се скуп тачака A датог простора таквих да је $OA \leq r$ назива лопта. Наведену лопту означавамо са $l(O,r)$. Тачку O називамо центар, а дуж r полупречник лопте.

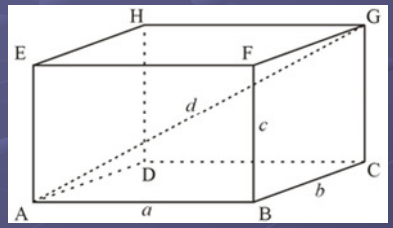
- *Лопту је могуће дефинисати и као обртно тело. Сфера је фигура која се добија обртањем кружнице око осе која садржи њен пречник, док је лопта фигура која се добија обртањем круга око наведене осе.*



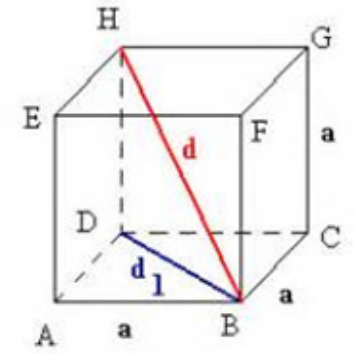
Призме (тростра́на, четворостра́на, петостра́на, шестостра́на)



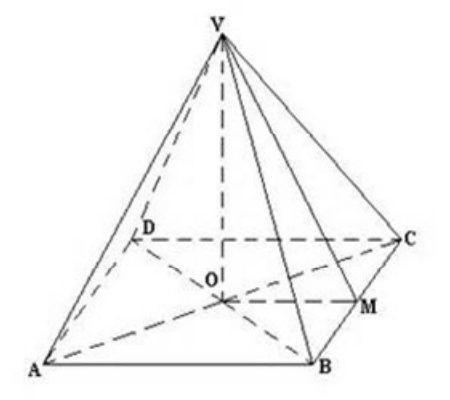
Паралелопипед



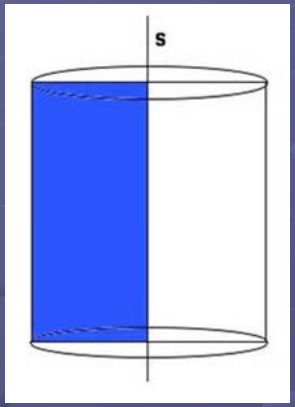
Квадар

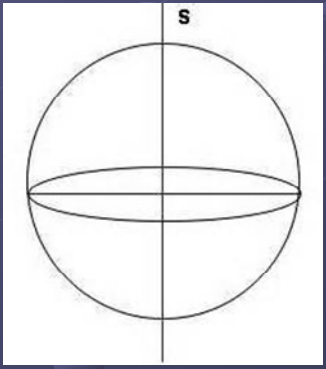


Коцка



Пирамида

Ваљак 

Купа

Лопта