1. ОБРАДА САДРЖАЈА О СКУПОВИМА

1.1. Зашто почетна настава математике полази од скупова

У почетној настави математике увођење ученика у математику започињемо са обрадом садржаја из теорије скупова. За овакво опредељење постоје неколико важних методичких и математичких оправдања која треба да се поштују при организацији и извођењу наставе. Међу тим оправдањима као познатији разматрамо следеће:

1.Приликом упознавања математичких обележја из непосредне околине дете најпре открива постојање одређених конкретних предмета. Наредни корак у сазнајној делатности деце је откривање скупова, као битно својство конкретних предмета. Наиме, поред других, квалитативних особина, дете сазнаје да предмети имају особину да се увек јављају у неком одруђеном скупу. На основу сазнања за скупове долази се до сазнања математичких својстава објективне стварности-појам природног броја као битног својства еквивалентних скупове. Значи, дете упознаје скуп конкретних предмета, поред других особина, они имају особину да се јављају у одређеном броју. Због тога, сазнавање математичких обележја објективне стварности код деце пролази кроз три етапе, и то:

- **прва етапа**, упознавање конкретних предмета из непосредне околине,
- **друга етапа**, упознавање скупова предмета, као битно својство предмета,
- **трећа етапа**, упознавање природног броја као битно својство еквивалентних скупова.

Овај пут упознавања је природан, прилагођен узрасним особеностима ученика, будући да пут до апстрактности (природан број) започиње упознавањем конкретних предмета из непосредне околине детце.

2.Полажење од скупова доприноси бољем разумевању рада са бројевима и операција са њима. Тако, операције са скуповима (унија и разлика) која се састоји у раду са конкретним објеката и за ученике првог разреда разумљивије од операција сабирања и одузимања природних бројева. Скупови и операције са скуповима су доступни перциптивним сазнањем, ученици могу да их упознају визуелно и говором, будући да су то операције са конкретним предметима. Насупрот томе, операције са природним бројевима су менталне су операције и нусу доступне непосредном посматрању, него ученици мору да их упознају само мисаоним делатностима. Због тога, са методичке тачке гледишта математичко образовање ученика треба да полази од скупова, будући да су то операције са конкретним предметима и од њих се иде ка менталним операцијама, односно према операцијама са бројевима. Овакви прилази олакшавају пут до природног броја, зато што уз помоћ скупова и операција са њима добијају очигледну основу.

3. Са обрадом садржаја из теорије скупова стварају се повољније претпоставке да ученици раније одпочну да врше анализу и синтезу, упоређивање и супротстављање, апстракцију и генерализацију, односно доприноси се интензивнијем интелектуалном развоју ученика.

4. У почетној настави математике изграђују се и геометријски појмови, као што су: тачка, права, дуж, раван и други. Посматрањем тих појмова као скупове тачака стварају се повољни услови за њихово правилније и свеобухватније дефинисање; успешно се могу објаснити односи између геометријских појмова и да се искажу применом математичке терминологије и симболике.

5. Садржаји наставе математике изводе се из математике као науке и треба да одражавају достигнути степен развоја математике као науке. Са увођењем садржаја

теорије скупова у почетној настави математике успоставља се међусобна веза наставе математике и развојних тенденција математичке науке. Поред тога, са увођењем елемената теорије скупова у почетној настави математике дају се услови за савременију интерпретацију класичних математичких садржаја чиме се настава математике приближава математичкој науци.

1.2. Увођење појма скупа и подскупа

Појам скуп је основни појам и као такав се не дефинише, односно не може да сведе на једноставније појмове, већ се "објашњава" на конкретним примерима. Притом користимо примере из непосредне околине ученика, чиме треба да схвате да скуп произилази из објективне стварности. Отуда у првој фази формирања овог појма полази се од објеката који су ученицима познати, од којих се формирају реалне целине, са издвајањем елемената по неком истакнутом заједничком особином.

Пример – Скуп ученика једног одељења, скуп клупа у учионици и сл. На погодан начин треба указати да одређени тремини из свакодневног говора имају значење скупа-јато, стадо и сл.

При давању примера за скуп треба избегавати неодређене случајеве као што су: скуп птица на дрвету, скуп ученика школе и сл. зато што није довољно познато који елементи припадају скупу.

Даље осмишљавање појма скупа тражи да се он формира од дидактичког материјала, скуп апликација на фланелографу, скуп логичких блокова, који се прво класификују према једном својству (скуп црвених плоча, скуп труогаоних плоча), потом према двема особинама (скуп црвених кружних плоча, скуп већих троугаоних плоча) и на крају по више особина (скуп великих црвених квадратних плоча).

Други основни појам у теорији скупова је појам "елемент" скупа. Овај појам се уводи сасвим спонтано, тј. преко активности да се утврди од којих објеката се састоји посматрани скуп – свака црвена плоча је елемент скупа црвених плоча, свака клупа је елемент скупа клупа учионице итд.

Са одређивањем елемената посматраног скупа спонтано се уводи појам "припада" и "не припада". Тако, при исказивању "црвена плоча је елеменат скупа црвених плоча", још се каже "црвена плоча припада скупу црвених плоча" или "сива плоча не припада скупу црвених плоча" и сл. Са увођењем појмова "елемент", "припада" и "не припада" дате су све припреме за извођење закључка да "један скуп је дефинисан ако су познати његови елементи", односно ако се зна који елеменет припада том скупу а који не припада.

Формирање скупа према датом својству елемената тражи одређену опрезност у погледу избора својстава према којима се формира, односно то својство не сме бити двосмислено или нецелисходно.

Припрема за графичко означавање скупова врши се преко активности са одговарајућим дидактичким материјалом-логички блокови и обруч од конца, врпце или жице. Ученици праве обруч (Венов дијаграм) унутра стављају логичке плоче према унапред одређеном својству (по боји, по облику, по величини). На слици су формирани скупови од кружних плоча (а) и скуп од црвених плоча (б).

Преко вежби са обручом и уношењем одређених предмета у његову унутрашност остварују се више образовних задатака. Тако, врши се припрема за графичко означавање скупа, осмишљавају се појмови "припада" и "не припада", групишу се плоче према два својства, дају се услови за увођење логичких операција конјукција и операција пресека скупова. Применом логичких плоча из дидактичког комплета ученици боље упознају геометријске облике: круг, троугао, квадрат и правоуаоник.

При активности у вези са формирањем скупова на основу датог својства, препоручују се игре као што су: један ученик прелаже својство елемената скупа, а ученици формирају скуп са тим својством; наставник (или један ученик) формира скуп а ученици одређују својство елемената на основу којих је формиран.

У вези са графичким означавањем скупова битно је да се уочи да Венов дијаграм, поред елемената и криве затворене линије, садржи и део равни који наставник истиче не као битно обележје скупа, већ као помоћ који служи за означавање скупова. Даље осмишљавање графичког означавања скупова врши се преко предвиђене активности у уџбенику за први разред, где ученици, на основу обележја, одвајају кривом затвореном линијом елементе који припадају датом скупу.

Пример – У датим логичким блоковима, Веновим дијагамом формирај скуп троуглова (сл. ..).

После графичког означавања скупова следи увођење симболичко означавање, применом великих заграда и великих слова латиничне азбуке:

$$\{a, b, c, d\} \text{ или } A = \{a, b, c, d\},$$

и чита се "A је скуп чији су елементи a, b, c, d". Приликом записивања скупова великим заградама, ученици треба да схвате да, запис елемената скупа су именовани, означени са "a","b", "c", "d", а не као прост збир од симбола са којима се именују елементи. Касније се уводе симболи $\notin$ (не припада), при чему се запис $a \in A$ чита: "a је елеменат скупа A", односно $e \notin A$ чита се "e није елеменат скупа A" или краће "e не припада скупу A".

При увођењу симбола $\in$ и $\notin$ треба нагласити да су они уведени на основу договора.

Приликом активности у вези са формирањем скупова значајно је обратити пажњу на двоелементне, једноелементне и празне скупове. Двоелементни скуп касније ће се користити за увођење појма "уређени пар". Једноелементни скуп, пак, разматра се посебно са циљем да се направи разлика између једног елемента и скупа од једног елемента.

Празан скуп представља проширење појма скупа који је претходно формиран на ниво интуитивног познавања. Представа празног скупа формира се конкретним примерима из непосредне околине ученика.

Пример – Ако се формира скуп ученика према месецу којима пада њихов рођендан, уколико у неком месецу није рођендан ниједном ученику, тај скуп ће бити празан.

Значи, први примери за празан скуп не треба давати одвојена, већ заједно са примерима за непразне скупове. Симбол празног скупа Ø уводи се непосредно пре симобичког означавања пресека два скупа.

Значајан моменат у осмишљавању појма скупа је увођење појма подскупа. И овај појам уводи се преко конкретних примера, и то на скуповима у којима део елемената има неко својство које ученици могу лакше да уоче. За такве примере погодне су логичке плоче.

Пример – Подскуп скупа кружних плоча је скуп од црвених кружних плоча, скуп већих троугаоних плоча је подскуп скупа троугаоних плоча и сл.

Пример – Подскупове можемо формирати и од скупова природних бројева прве десетице, тако је скуп природних бројева мањих од 5 подскуп скупа природних бројева прве десетице.

Проширивањем скупа природних бројева до 100, до 1000 итд., дају се велике могућности формирања подскупова датог скупа бројева – парни бројеви до 100, као подскуп бројева прве стотице и сл.

Погодно је на почетку да се ради са скуповима датих Веновим дијаграмом, зато што се подскупови могу означавати линијама друге боје (слика).

1.3. Еквивалентни и једнаки скупови

Завршна фаза формирања појма скупа је увођење појмова еквивалентних и једаких скупова. Еквивалентност скупова уводи се упоређивања два скупа придруживањем "један на један" или обострано једнозначно придруживање, тј. сваком елементу једног скупа придружује се само један елеменат другог скупа и обрнуто. На почетну је погодно да скупови буду са неком "видљивим" везом међу њиховим елементима као што су шоље и тацне, ученици и столице и сл. Приликпм придруживања "један на један" ученици уочавају да један скуп има више елемената од другог (скуп троуглова има више елементата од скупа кругова), један скуп има мање елемената од другог (скуп квадрата има мање елемената од скупа кругова) или пак, један скуп има исти број елемената са другим скупом (скуп троуглова има исти број елемената као скуп квадрата).

За скупове којима је извршено придруживање "један на један" каже се да су истобројни (имају исти број елемената) или су еквивалентни. Није препоручљиво настојати да ученици првог разреда по сваку цени употребљавају термин еквивалентни зато што се теже изговара а нетачно изговарање може изазвати одбојност код ученика. Тај термин ученици ће изучавати у старијем узрасту и тада ће га лакше изговарати. Овде је значајно да се схвати истобројност елемената тј. поступак одређивања једнакости броја елемената два скупа, односно утврђивање њихове еквивалентности.

Приликом упоређивања скупова према броју елемената треба да се води рачуна на вербално исказивање. Наиме, за скупове A и B не може се рећи "скуп A је већи од скупа B" и да се запише A>B, неко "скуп A има више елемената ос скупа B", а релација " >" моше се успоставити између броја њихових елемената, тј. бA>бB или 4>3.

Активности у вези са утврђивањем еквивалентности или нееквивалентности два скупа представља припрему за увођење конкретних природних бројева и за упоређивање природних бројева.

Обрада једнакости два скупа је значајно тежи методички проблем од еквивалентности. Највећа потешкоћа призилази из блискости схватања значења термина **исто и једнако** за ученике првог разреда. Тако, ако ученици посматрају два скупа од по три сиве кружне плоче, онда сматрају да су та два скупа једнака, зато што се састоје од елемената истог облика-мале сиве плоче. Да би се овај проблем решио треба бирати адекватне примере, у којима се од истих елемената два пута формира скуп.

Пример – Скуп истих атлетичара приказаних у различитом поретку (онај који је био први сада је трећи, четврти је други и сл.).

Пример – Скуп хеликоптера груписаних на различите начине.

На основу оваквих примера ученици ће доћи до закључка да: "два скупа су једнака само тада када и једном и другом скупу припадају исти елементи" (исти атлетичари, исти авиони, исте играчке и сл.). За приказивање таквих примера потребно је обезбедити напосрдна очигледност – наставни филм, графофолија, дијафилм, апликације и сл.

Када ученици науче слова и бројеве до 10, могу се обрадити и други примери у вези са једнакошћу два скупа. Тако, може се посматрати скуп: A-скуп слова којим је написано реч ИВАН и B-скуп слова којим је написана реч НИВА. Ученици ће уочити да су та два скупа "састављени" од истих елемената и за њих кажемо да су једнаки. Исто тако, ако посматрамо скупове природних бројева мањих од 5 и скуп бројева који се добијају када од 9 редом одузмемо бројеве 8, 7, 6 и 5, ученици ће уочити да су та два скупа "састављени" од истих елемената, односно елементи и једног и другог скупа су бројеви 1, 2, 3 и 4 и за њих кажемо да су једнаки.

1.4. Операције са скуповима

Операције са скуповима: **унија, пресек** и **разлика** су логичке операције чији је смисао да се на један утврђен начин од два дата скупа добије један скуп који задовољава одређене услове. Приликом увођења операција са скуповима намеће се један методички проблем-којим редоследом обрађивати те операције. Неки аутори сматрају да треба прво обрадити операцију пресек, а затим унију скупова. У образложењу оваквог става наводи се да су пресек и унија повезане са логичким операцијама конјукцијом и дисјункцијом. Будући да у матетатичкој логици прво се уводи конјукција, операције са скуповима треба да уведу операцију која је повезана са њом, а то је пресек скупова. Друго размишљање наводи у образложењу овог става да приликом увођења уније треба посматрати два случаја: прво, када скупови немају заједничке елементе и друго, када скупови имају заједничке елементе, односно њихом пресек је непразан скуп, па према томе за обраду уније потребно је имати знање о пресеку.

Други аутори сматрају да прво треба увести операцију уније. Овакво опредељење је засновано на чињеници да ученици емпиријски лакше формирју унију неко пресек, а и према аналогији са сабирањем природних бројева која се као операција прва уводи а изводи из уније. Код нас је прихваћено друго схватање, односно прво се уводи унија скупова, а потом пресек.

Увођење појма уније скупова повезано је са осмишљавањем значења речице "или". У том циљу треба организовати активности као на пример: у једну кесу ставимо црвену и сиву плочу, односно скуп црвене и сиве плоче. Наставник пипа кесу и пита: "Коју плочу да извадим?" Притом се очекује одговор. "Црвена или сива?" Приликом неколико вађења плоча некад ће погодити ученици који су рекли "црвена" а некад она који су рекли "сива". Притом код ученика се интуитивно намеће одговор "црвена или сива", а тиме се намеће и сазнање да је формиран један скуп плоча од два скупа: један црвених и други сивих плоча, а елементи тако формираног скупа припадају или једном или другом скупу.

После тога прелази се на један скуп од два дата скупа који немају заједничких елемената. Зато је погодно бирати примере из непосредне околине ученика: скуп крушака и скуп јабука –скуп воћа. После рада са конкретним предметима прелази се на рад са уџбеником, унија се формира применом Веновог дијаграма, како што се на почетку формирају од скупова који немају заједничке елементе. У даљим активностима формира се унија и од скупова који имају заједничке елементе и то прво од скупова чији су елементи конкретни предмети, а затим и са цртежима у уџбенику.

Приликом одређивања уније два скупа преба вршити и упоређивање броја елемената уније (број елемената уније) са бројевима скупова од којих је формирана унија. При том треба да се уочи да: ако скупови немају заједничке елементе тада број елемената уније једнак збиру бројева елемената скупова од којих је добијена унија, односно унија има онолико елемената колико имају два скупа заједно. Ако скупови имају заједничке елементе, тада је број елемената уније мањи од збира бројева елемената скупова од којих је добијена. Уочавање везе између бројева елемената скупова који немају заједничке елементе (дисјунктни скупови) и броја елемената њихове уније потребно је због повезивања збира два природна броја са бројем уније тих скупова.

Увођење операција пресека скупова се припрема са формирањем уније скупова који имају заједничке елементе. Преко ових активности скреће се пажња ученика да се тиме формира још један скуп који је састављен од елемената који припадају и једном и другом скупу. Тиме се осмишљава значење везника "и".

Пример – Формирамо унију од скупова А-црвене плоче и скупа В-кружне плоче. Црвене кружне плоче представљају нови скуп чији елементи припадају и скупу А и скупу В.

Правилно схватање операције пресека скупова подразумева приказивање више примера из непосредне околине ученика.

Пример – Формирање уније скупова: ученика са патикама и ученика са сивим мајицама, ако међу овим ученицима који су са патикама има неких који носе сиве мајице.

Пример – Формирање скупа од црвених плоча и скупа кружних пложа – међу црвеним плочама има има и кружних плоча које припадају скупу кружних плоча.

После тога се прелази на одређивање пресека скупова чији елементи су бројеви, слова и сл., при чему се скупови представљају табеларно или помоћу Веновог дијаграма.

Преко вежби у вези са одређивањем пресека два скупа осмишљава се и појам празног скупа. Наиме, после обраде више примера за одређивање пресека скупова који имају заједничке елементе, дају се примери када скупови немају заједничке елементе, односно њихов пресек је празан скуп.

Пример – Могу се посматрати овакви случајеви:

$A = \{ M, I, L, A, N \}$, $B = \{ M, A, N, E \}$, $A \cap B = \{ M, A, N \}$,

$C = \{ b, r, o, j \}$, $D = \{ o, s, a, m \}$, $C \cap D = \{ o \}$,

$R = \{ s, e, d, a, m \}$, $S = \{ t, r, i \}$, $R \cap S = \emptyset$.

Појам разлике скупова уводи се на конкретним примерима у којима се од датог скупа одвајају неки елементи који имају неко заједничко својство по којима се разликују од других елемената.

Пример – Од скупа лала издвајамо црвене лале, од црвених плоча издвајамо кружне плоче и сл.

Касније се праве скупови чији елементи су бројеви (од скупа бројева прве десетице издвајају се парни-остају непарни и то представља разлику), затим слова или други симболи.