Предмет: Математика 2 (предавања)
Предметни наставник: Проф. др Љиљана Пауновић
Датум предавања: 18. март 2020. год.
Одсек: Разредна настава

Глава 1

Реални низови

1.1 Преглед дефиниција и теорема

Дефиниција 1.1. *Ако је f функција која пресликава скуп природних бројева $\mathbb{N}$ у скуп реалних бројева $\mathbb{R}$ (у ознаци $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$), онда се функција f назива **реалним низом**.*

Реални бројеви

$$a_1 = f(1), a_2 = f(2), \ldots, a_n = f(n), \ldots$$

називају се члановима низа. Нпр. m-ти члан низа a_m је тада вредност функције $f(m)$. Тако нпр. низ чији је општи члан дат формулом $a_n = \dfrac{1}{2n}$ има пети члан $a_5 = \dfrac{1}{10}$, двадесети члан $a_{20} = \dfrac{1}{40}$, итд.

Дефиниција 1.2. *Реални низ $f(n_k) = a_{n_k}$, где је $k \in \mathbb{N}$ и*

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \ldots$$

*називамо **подниз** низа $f(n) = a_n$.*

Тако на пример низ $a_{n_k} = \dfrac{1}{2k}, n_1 = 2, n_2 = 4, \ldots, n_k = 2k, \ldots$, је подниз низа $a_n = \dfrac{1}{n}$.

Пример 1.1. *Низ* (a_n) *код кога је разлика ма која два узастопна члана увек иста, тј. за који постоји број* d *такав да*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\; a_{n+1} - a_n = d, \tag{1.1}$$

назива се ***аритметички низ****. Из (1.1) имамо* $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$*, а одавде*

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}.$$

Дакле сваки члан аритметичког низа (осим првог) је аритметичка средина њему суседних чланова. Тако на пример низ

$$3, 5, 7, 9, \ldots, 2n+1, \ldots$$

је аритметички низ.

Пример 1.2. *Низ* (a_n) *код кога је количник свака два узастопна члана увек исти, тј. за који постоји број* q *такав да*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\; \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \tag{1.2}$$

назива се ***геометријски низ****. Из (1.2) следи да је* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$*, а одавде*

$$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2},$$

односно сваки члан геометријског низа (осим првог) је геометријска средина њему суседних чланова. Геометријски низови су на пример:

$$1, 3, 9, 27, \ldots, 3^{n-1}, \ldots$$

Пример 1.3. *Низ чији је општи члан* $a_n = \dfrac{1}{n}$ *је тзв.* ***хармонијски низ****. Сваки члан хармонијског низа је хармонијска средина њему суседних чланова, тј.*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\; \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}\right).$$

Ограничени и монотони низови

Дефиниција 1.3. *Низ (a_n) је* ***ограничен одозго*** *ако*

$$(\exists r \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq r, \tag{1.3}$$

а ***ограничен одоздо*** *ако*

$$(\exists m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ m \leq a_n. \tag{1.4}$$

Ако је низ ограничен одозго и одоздо онда кажемо да је ***ограничен****.*

Може се доказати да је низ (a_n) ограничен ако и само ако

$$(\exists k \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq k$$

(где $\mathbb{R}^+$ означава скуп позитивних реалних бројева).

Тако на пример, низ (n^2) је ограничен одоздо, јер је испуњен услов (1.4) зато што је сваки члан овог низа већи од нуле. Исти низ, није ограничен одозго (одакле следи да није ограничен), зато што за свако $r \in \mathbb{R}$ важи $n^2 > r$, и то: за свако $n \in \mathbb{N}$ у случају $r \leq 0$, односно за $n > \sqrt{r}$ у случају $r > 0$.

Низ $(1/n)$ је ограничен одозго, јер је сваки члан овог низа мањи или једнак јединици. Примећујемо да је исти низ ограничен и одоздо, зато што на пример важи: $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < \dfrac{1}{n}$. На тај начин тачан је јачи закључак: низ $(1/n)$ је ограничен. Низ чији је општи члан $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ је ограничен јер је

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left| (-1)^n \frac{n}{n+1} \right| < 1.$$

Дефиниција 1.4. *Ако за низ (a_n) за сваки $n \in \mathbb{N}$ важи*

1) $a_n \leq a_{n+1}$, *онда низ називамо растући,*

2) $a_n \geq a_{n+1}$, *онда низ називамо опадајући.*

Ако се знаци $\leq$ и $\geq$, респективно замене знацима $<$ и $>$, онда низ називамо *строго растући*, односно ***строго опадајући***. За низове описане овом дефиницијом кажемо да су ***монотони***.

Пример 1.4. *Испитати монотоност низа чији је општи члан* $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Решење. Овај низ је строго растући, јер за свако $n \in \mathbb{N}$ је

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0,$$

па је $a_n < a_{n+1}$.

Пример 1.5. *Испитати монотоност низа чији је општи члан* $b_n = \dfrac{1}{2n-1}$.

Решење. Овај низ је строго опадајући, јер за свако $n \in \mathbb{N}$ је $b_n > 0$ и важи

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{2n+1}{2n-1},$$

тј. $b_n > b_{n+1}$.

Примећујемо да се испитивање монотоности низа (a_n) са члановима сталног знака (тј. код којег важи: $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n > 0$ или $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n < 0$), може извести израчунавањем количника $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

Тако ако важи $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n > 0 (a_n < 0)$ и $(\forall n \in \mathbb{N})\ \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$, онда је $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \geq a_{n+1} (a_n \leq a_{n+1})$, што значи да је тада низ (a_n) опадајући (растући). Ако је пак $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$, онда је $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq a_{n+1} (a_n \geq a_{n+1})$, па је тада низ (a_n) растући (опадајући).